Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la EGB

Dirección General de Cultura y Educación
Gobierno de la Provincia de Buenos Aires

Subsecretaría de Educación

Provincia de Buenos Aires

Gobernador
Ing. Felipe Solá

Director General de Cultura y Educación
Prof. Mario Oporto

Subsecretaria de Educación
Prof. Delia Méndez

Director Provincial de Educación de Gestión Privada
Prof. Juan Odriozola

Directora de Currículum y Capacitación Educativa
Prof. Marta Pfeffer

Directora de Educación General Básica
Lic. María Cristina Ruiz

diciembre de 2004

Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la EGB

Proyecto
Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática
en la Educación General Básica

Material destinado a equipos docentes, directivos e inspectores

Dirección de Educación General Básica
Dirección de Currículum y Capacitación Educativa

Coordinación Pedagógico-Operativa
Prof. María Eugenia Álvarez
Lic. Sofía Spanarelli

Equipo de Especialistas
Prof. Silvina Petersen (Matemática)
Prof. Julio Brisuela (Matemática)
Prof. Mónica Salgado (Matemática)
Prof. Silvina Volpe (Procesamiento didáctico)

Colaboradores
Prof. Oscar Isnardi
Prof. Gloria Robalo

Documento de apoyo para la capacitación
DGCyE / Subsecretaría de Educación

Dirección General de Cultura y Educación
Subsecretaría de Educación
Calle 13 entre 56 y 57 (1900) La Plata
Provincia de Buenos Aires

publicaciones@ed.gba.gov.ar

Índice

Objetivos del material

Primera parte
Que el docente:
- Logre construir criterios para la planificación institucional
- Reinterprete los conocimientos informales que poseen los alumnos como lugar de intervención en sus prácticas y como punto de partida para aprendizajes significativos

Segunda parte
Que el docente:
- Planifique teniendo en cuenta el abordaje areal de la matemática
- Resignifique la utilización de los problemas como instrumentos de construcción de conocimientos
- Reconozca las características de situaciones que posibiliten el aprendizaje en matemática

Tercera parte
Que el docente:
- Analice didácticamente las situaciones que plantee a sus alumnos, teniendo en cuenta:
  - El análisis de contextos
  - Los propósitos de la clase
  - Los contenidos a desarrollar
  - Los agrupamientos en los diversos momentos de la clase (individual, pequeño grupo o grupo total)
  - Los posibles procedimientos de los alumnos
  - Lo que se va a destacar de lo desarrollado por los alumnos, etcétera
- Logre registrar aspectos importantes durante la puesta en práctica de la previsión didáctica elaborada
- Reflexione: estableciendo la distancia entre sus previsiones y el producto logrado, analizando sus intervenciones ante situaciones imprevistas, usando la información obtenida, como insumo para realizar ajustes y/o planificar próximas clases.

Cuarta parte
Que el docente:
- Elabore secuencias didácticas teniendo en cuenta:
  - los saberes que poseen los alumnos,
  - la complejización de las actividades, y tomando ejemplos del análisis de los sentidos de la suma y la multiplicación
- Articule las secuencias a nivel institucional, estableciendo los acuerdos necesarios con sus colegas

Quinta parte
Que el docente:
- Amplíe su "caja de herramientas" para la organización de secuencias didácticas en el primero y segundo ciclos de la EGB
- Reconozca en ejemplos la presencia del abordaje areal de la matemática

Primera parte

... quienes mejor asumieron el desafío de compartir el rol protagónico con sus niños,
quienes pusieron la noción de proceso en el centro mismo de sus prácticas
y asumieron que si bien la maestra es quien más sabe,
los niños también tienen saberes provenientes de fuentes diversas,
y todos (incluida la maestra) pueden seguir su proceso de alfabetización,
a condición de que acepten utilizar el tiempo escolar para funcionar "a su mejor nivel".
Yo he dicho insistentemente que "un nuevo método no resuelve los problemas".
Pero la reflexión didáctica es otra cosa.
Emilia Ferreiro.
México, mayo de 2001[1]

El material que presentamos tiene la finalidad de contribuir al proceso de desarrollo curricular del área de Matemática en la Educación General Básica de la provincia de Buenos Aires, objetivo que se concreta, en cada institución, a través de la planificación institucional y en cada aula, en las propuestas de los docentes.

Es importante señalar que a partir de un texto escrito no se resuelven los problemas de las prácticas docentes; sin embargo, esperamos que este represente una oportunidad para centrar la discusión y la reflexión del equipo docente y directivo alrededor de la enseñanza de la matemática en su escuela con miras a continuar con las prácticas que conduzcan a los niños al conocimiento de la matemática de tal modo que el aprendizaje resulte funcional[2] y si tuviesen la necesidad de cambiarlas, que encuentren una orientación adecuada. En cada institución se deberá resolver entre la necesidad de continuar con las "buenas" prácticas de enseñanza de la matemática y modificar las incorrectas.

La función social de la institución escolar es la de enseñar. Cumplirla supone un largo proceso de construcción que requiere necesariamente de una "coordinación de la acción pedagógica" y esta consiste, básicamente, en la creación de condiciones y situaciones que permitan el desarrollo de la capacidad no sólo de los estudiantes sino también de los maestros y de todos los miembros de la institución, para participar en la producción de saberes y en la interpretación y transformación de códigos culturales histórica y socialmente producidos."[3]

Cuando nos referimos a la coordinación de la acción pedagógica, subyace el supuesto de que el proceso educativo es totalizador, o sea, que compromete a toda la institución y no sólo al docente frente al alumno.

[1] Fragmento de Lerner, D., *Leer y escribir en la escuela: lo real, lo posible y lo necesario*, México, Fondo de Cultura Económica, 2001.
[2] Que sepan cuándo es oportuno ponerlos en práctica y también cómo utilizarlos.
[3] Fragmento tomado de Chaves, P., *Gestión para instituciones educativas: un enfoque estratégico para el desarrollo de proyectos educativos. Módulo 2*, República Argentina, Buenos Aires, MCyEN, 1995.

La planificación curricular institucional y el área de Matemática

La planificación institucional es una producción propia, particular y específica de cada institución, elaborada por sus integrantes. En ella se explicitan y sintetizan propuestas de acción para alcanzar los objetivos que se persiguen. Es orientadora y brinda coherencia a la vida institucional.

En nuestro caso particular, para planificar en el área de la matemática, podemos plantearnos los siguientes interrogantes:

- ¿Por qué enseñamos? ¿Cuál es nuestra misión institucional?
- ¿Qué concepciones guían nuestra práctica educativa?
- ¿Qué enseñamos?
- ¿Qué aprenden nuestros alumnos?
- ¿Cuáles son nuestros problemas pedagógicos?[4]
- ¿Cuáles son nuestros recursos pedagógicos?
- ¿Se detectaron estudiantes que, en mayor medida, presentan necesidades educativas especiales, en relación con el resto de los alumnos?
- ¿Cuáles son los lineamientos que acreditan el aprendizaje de los alumnos y de su promoción?
- ¿Cuáles son los saberes previos de nuestros alumnos, ya sean adquiridos en la escuela o informalmente?
- ¿Qué nos proponemos enseñar?
- ¿Cómo?
- ¿Cuál será la organización de los tiempos y espacios?
- ¿Qué tipo de actividades nos proponemos realizar?
- ¿Cómo trabajaremos la interdisciplinariedad? [5]

En relación con la interdisciplinariedad, Claudi Alsina[6] enuncia objetivos concretos que deberían considerarse en la educación de la matemática de los futuros ciudadanos y señala, entre otros conceptos, la necesidad de que se asegure, también en matemática, una actitud positiva y una preparación adecuada frente a estos temas.[7]

[4] Entre otros, la repetición de temas sin que se note una complejización de las actividades relacionadas con un mismo contenido; diferencias importantes en cuanto al énfasis relativo de los aprendizajes que deben realizar los alumnos en relación con los diversos temas y con los diferentes componentes de los diversos campos temáticos (de conceptos y procedimientos), lo que lleva, muchas veces, a la creencia de que la matemática se compone de algoritmos solamente.

[5] Organizar ciertos contenidos con una mirada matemática hacia las otras áreas, tales como Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Artística y Lengua.

[6] Reconocido educador matemático español que visitó la Argentina en varias oportunidades invitado por la OMA (Olimpiada Matemática Argentina).

[7] Algunos objetivos que propone: Conocer las características métricas y proporciones del cuerpo humano y su evolución en el crecimiento alométrico tanto a nivel estático como dinámico, conocer las matemáticas subyacentes en los problemas nutricionales, ser capaz de planificar estrategias para disminuir la contaminación, conocer el sistema monetario nacional y sistemas monetarios internacionales, conocer los recursos de empaquetado, envasado, relaciones de tamaños con formas y precios, saber apreciar las informaciones numéricas o gráficas que concurren en el desarrollo político, juzgando su nivel de credibilidad.

No alcanza con que se traten los problemas relacionados con estos objetos, en los que se aplica la matemática como herramienta. Suele ocurrir que se trabaja sobre saberes descontextualizados y no se vuelve a analizar, por ejemplo, la validez de las soluciones en la realidad. Claudi Alsina afirma que, entonces, los alumnos podrán resolver "problemas de la clase" pero no "problemas de la vida". Cita un ejemplo concreto cuando se pregunta si saber restar es suficiente para saber dar un cambio, lo que algunos autores denominan la funcionalidad de los aprendizajes. Tal como expresa Davis Perkins: "Existe una diferencia entre tener cierta información en la propia cabeza y ser capaz de tener acceso a ella cuando hace falta; entre tener una habilidad y saber cómo aplicarla; entre mejorar el propio desempeño en una tarea determinada y darse cuenta de que uno lo ha conseguido".[8]

Alsina propone no diluir los objetivos concretos en pequeños problemas al servicio de conceptos y procedimientos generales sino incluirlos en investigaciones y proyectos. Por ejemplo, si se decide analizar la cosecha 2004 de la cebolla en el distrito de Villarino, ¿será importante saber si la luz es más cara en el zona rural o en la urbana y por qué?

- ¿Qué componentes y tipos de planificación realizaremos? [9]
- ¿Por qué, para qué, qué, cuándo y cómo evaluar? ¿qué funciones cumplirá la evaluación, quiénes serán los responsables, en qué momento se realizarán? ¿qué instrumentos se utilizarán? ¿cómo se utilizarán los datos obtenidos? ¿cómo se comunicarán los resultados? ¿a quiénes?

Estos interrogantes se pueden trabajar a nivel institucional en forma gradual, sin perder la visión integral y presentar una propuesta vinculada al área de campos del conocimiento y, posteriormente, por ciclos, años y secciones.

actividad 1

Cuando elaboramos la planificación institucional en nuestra escuela,
¿nos planteamos estos interrogantes?,
¿u otros equivalentes?,
¿cuáles?,
¿nos hicimos otras preguntas?,
¿nos haríamos otras?,
¿establecimos acuerdos? ■

Es importante destacar que, aunque no esté escrita, siempre existe en las escuelas una planificación institucional; una concepción acerca de cómo enseñar y de cómo se aprende; una idea del lugar que ocupan el alumno, el docente y el conocimiento; uno o más enfoques en relación con la enseñanza ideas acerca de cuáles son los problemas y cómo utilizarlos y con qué objetivos; criterios, al menos implícitos, de selección y organización de contenidos y secuenciación de actividades, etcétera. Todos estos elementos constituyen la planificación institucional.

[8] Perkins, D., *La escuela inteligente.* Barcelona, Gedisa, 1997. Señalamos otros conceptos de Perkins, pedagogo inglés: "Es en parte el reconocimiento de esas diferencias lo que nos ha llevado a la idea de la *metacognición,* o más específicamente, de un conocimiento, unas experiencias y unas habilidades metacognitivas. El conocimiento metacognitivo es el conocimiento sobre el conocimiento y el saber, e incluye el conocimiento de las capacidades y limitaciones del pensamiento humano, de lo que se puede esperar que sepan los seres humanos en general y de las características de personas específicas –en especial, de uno mismo– en cuanto a individuos conocedores y pensantes. Podemos considerar las habilidades metacognitivas como aquellas habilidades cognitivas que son necesarias, o útiles, para la adquisición, el empleo y el control del conocimiento, y de las demás habilidades cognitivas."

[9] Unidades didácticas, proyectos específicos, secuencias de actividades diferenciadas para la enseñanza de algún contenido particular, actividades permanentes que se "repiten" a lo largo del año escolar, planificadas en forma anual, bimestral o trimestral.

¿Por qué enseñar matemática en la EGB?

Inicialmente podríamos afirmar que la matemática es una exploración de la complejidad de ciertas estructuras de la realidad (ya sea cuantitativas que llevan a la aritmética, como espaciales que llevan a la geometría y a la medida), desarrollada de esta manera desde hace siglos.

Algo de historia

Se conocen aportes matemáticos de pueblos que precedieron a los griegos como los sumerios, los babilonios, los egipcios, pero todos de carácter práctico, reglas simples y desconectadas entre sí. En la cultura griega del siglo VI a.C. se gestó la matemática con características muy semejantes a las que presenta la que practicamos en la actualidad: el conocimiento por la persuasión, la argumentación.

Para los pitagóricos era algo más: un instrumento para entender cómo "todo es armonía y número" en el universo. Rechazaron las doctrinas tradicionales, las fuerzas sobrenaturales, los dogmas y demás trabas para el pensamiento. Fueron los primeros en examinar el aparente caos del universo y llegaron finalmente a la doctrina de que la naturaleza está ordenada y funciona de acuerdo con un vasto plan. Descubrieron algunas leyes de la naturaleza.

Para Platón y los neoplatónicos, para el renacentista Kepler y algunos contemporáneos nuestros como Poincaré y Hardy *la matemática es una forma de creación de belleza intelectual.* Para ellos la actividad matemática es una amalgama entre el reconocimiento del orden presente en el universo, la creatividad y la belleza. Allí se encuentra su *valor educativo más profundo,* más que en el mero dominio de técnicas matemáticas.

> *La matemática forma parte de la cultura*[10] *humana* y como tal debe ser accesible a todos. Debe ser una oportunidad de evolución para las personas y no un obstáculo en la vida de las mismas.

Hoy en día no es posible concebir la acción de un arquitecto, de un ingeniero, de un trabajador cualquiera de la construcción, de un economista, de un comerciante, de un industrial, de un fabricante, de un vendedor, de todo el engranaje de la industria y el comercio, sin el auxilio de la matemática y de las computadoras, que es hablar también de la matemática. Sin embargo, a pesar de que es mucho, no lo es todo; si solamente se atienden las cuestiones de utilidad práctica para las que sirve eficazmente, la formación integral del hombre se descuida y se realiza de manera incompleta.

Aunque la alta aplicabilidad de la matemática, el hecho de que sea capaz de explicar satisfactoriamente estructuras complejas de la física, la química, la biología, la economía, la sociología, hace olvidar las limitaciones profundas del pensamiento matemático, es conveniente recordar que el ser humano es mucho más profundo que lo que cualquier estructura matemática puede abarcar. Justamente, lo que le permite dominar algunos aspectos de la realidad, pero nunca la totalidad, consiste en considerar ciertos aspectos y no todos, entre los que pueden quedar afuera algunos que resulten importantes para el hombre como tal.

El pensamiento matemático llega hasta donde puede y no resulta adecuado que vaya más lejos; tanto en el tratamiento de las ciencias como en nuestra vida cotidiana, no todo se puede explicar con cifras y formalismos matemáticos.

[10] Se considera cultura, en un sentido general, a toda producción humana.

A pesar de las limitaciones mencionadas, *nadie duda de la importancia de la matemática y de la relación que tiene con los problemas, acciones, tareas que a diario se deben resolver, y de allí la importancia de que forme parte de la currícula de la EGB.* Entre *las actividades que se realizan a lo largo del día*, muchas de ellas *se relacionan con contenidos matemáticos,* tales como: al estacionar un auto se hace uso de las nociones espaciales, al buscar en el diario las variaciones de temperatura se están leyendo cuadros estadísticos, al analizar el recibo de sueldo o al contar las monedas para el colectivo se realizan cálculos aritméticos, al interpretar un mapa de rutas se ponen en movimiento conocimientos relacionados con la medida y con la proporcionalidad, etcétera.

Otras ciencias utilizan la matemática como su lenguaje, también usan sus métodos y sus estructuras. En la actualidad, son *los modelos matemáticos los que permiten resolver problemas en otros campos científicos.* Así, *modelizar* una situación consiste en representar los objetos de la misma y sus relaciones mediante el lenguaje matemático, transformándola en un problema matemático. Luego se resuelve el problema dentro de la matemática y, por último, se verifica si los resultados obtenidos tienen sentido en la situación inicial. De no ser así, se buscará otro modelo matemático que se adecue mejor a la situación original.

En síntesis:

- Los conocimientos matemáticos son construcciones a las que ha llegado el hombre después de recorrer largos caminos, dado que el entorno dinámico y cambiante le fue planteando diferentes problemas que generaron nuevas respuestas, diferentes formas de resolución, diferentes habilidades que produjeron nuevos conocimientos.

- El avance de la matemática puede concebirse como una permanente búsqueda de nuevas respuestas ante los diferentes problemas que provienen de sí misma, de la realidad y de su interrelación con otras ciencias o disciplinas como la física, la química, la ingeniería, a las que se la vinculó desde sus orígenes, pero también a la economía, la biología, la medicina, la sociología, la psicología y hasta la lingüística.

- La matemática permitió y permite al hombre interpretar, representar, explicar, predecir y resolver los problemas que le plantea su entorno, es lo que suele denominarse el punto de vista instrumental

> Hasta el momento hemos hecho referencia a los valores *instrumentales* y *culturales* de la matemática.

La matemática –como parte de un proceso evolutivo– no permanece estática, es una actividad humana específica orientada a la resolución de los problemas que le surgen al hombre en su accionar sobre el medio. Por lo tanto, los saberes matemáticos no son fijos e inamovibles sino que se transforman al ser utilizados por otros hombres, en otros tiempos, en otros grupos sociales, debido a otras necesidades, en condiciones diferentes aquellas en las que se crearon. Puede afirmarse *que la matemática es una producción cultural, diferentes sociedades producen diferentes matemáticas. Es un objeto cultural inserto en un proceso histórico y social determinado.*

Los cambios sociales, históricos, tecnológicos traen aparejados cambios en las utilidades de la matemática. Por ejemplo, existiendo un uso bastante generalizado de las calculadoras de bolsillo, ¿es útil saber manejar los algoritmos? El concepto de división sigue siendo importante, las propiedades, también el método, porque se usa después en la factorización de polinomios. En la actualidad, quizá se necesite saber menos matemática algorítmica y, en cambio, alcanzar/desarrollar más acerca de la comprensión de conceptos e ideas matemáticas más generalizadas.

Las diferencias culturales deberían tenerse en cuenta en la escuela. En ella, en general, se ignoran los conocimientos, intuiciones, ideas que los niños traen. *Todos los grupos socioculturales poseen variadas herramientas para clasificar, ordenar, cuantificar, medir, comparar, etcétera, en síntesis, un amplio desarrollo matemático.*

La escuela debería tender puentes entre esos conocimientos informales que los niños adquirieron en el intercambio con sus padres, sus hermanos, sus amigos, sus vecinos y los conocimientos escolares formales. De lo contrario, los niños pueden considerar que la matemática que aprenden en la escuela les sirve solo para resolver problemas de la escuela, sin reconocerla en la resolución de problemas que se le puedan plantear en su vida cotidiana.

Mucha información se suministra, se comunica, se intercambia y se debe analizar en términos matemáticos, por ejemplo: discutir la relación entre fumar y la probabilidad de adquirir cáncer de pulmón, debatir sobre la proporción del PBI que destina el estado a la educación, expresar la diferencia de acceso al uso de bienes tecnológicos entre los diferentes estratos de la sociedad, entre otros.

> Por ello decimos que la matemática posee un valor *social.*

Juntamente con otras disciplinas, la matemática *posibilita la construcción del pensamiento lógico necesario para organizar, seleccionar, sistematizar la información que se nos suministra y para relacionar, integrar, inferir conceptos, ideas, principios matemáticos.* Esta es su más reconocida "función". Muchos afirman que la matemática enseña a pensar. Sin embargo, ¿esto sucede siempre? En realidad, siempre que demos a nuestros alumnos la oportunidad de hacerlo.

> La matemática también tiene un valor *formativo.*

Brousseau[11] afirma que la matemática constituye un dominio en el que los niños pueden aprender los rudimentos de la gestión individual y social de la verdad, las reglas sociales del debate, la toma de decisiones, cómo convencer respetando al interlocutor, cómo dejarse convencer contra su deseo o interés, cómo renunciar a la autoridad, a la seducción, a la retórica, a la forma para compartir lo que será una verdad común.

> Desde este punto de vista la matemática *puede colaborar en la formación de actitudes democráticas si desde su enseñanza se trabaja para ello.*

Es así como en razón de su valor instrumental, formativo, cultural y social las habilidades, competencias y conocimientos matemáticos son necesarios para el desenvolvimiento del individuo dentro de la sociedad actual.

[11] Especialista francés en didáctica de la matemática, que visitó varias veces nuestro país y que mantiene permanente contacto con grupos de investigación de la Argentina.

¿Para qué enseñar matemática en la EGB?

Algo de historia
En cuanto a los aspectos curriculares, el currículo tradicional de matemática fue puesto en práctica respondiendo a las necesidades de la revolución industrial. En los primeros sistemas escolares, que datan de aproximadamente cien años, se alfabetizaba en lectura, escritura y aritmética en el nivel primario. En el siglo XIX, en el territorio que hoy ocupa la República Argentina, hay claros ejemplos que muestran que ya en ese momento había necesidad de transmitir a los niños ciertos contenidos matemáticos. Se les enseñaba a leer y escribir y rudimentos del cálculo. Esta tradición ha evolucionado a través del tiempo. Ya nadie discute la demanda de incluir la enseñanza de la matemática en los niveles básicos de la escolaridad superando la simple yuxtaposición de conceptos.

Analizando la situación actual, en muchas oportunidades no hay coincidencia ni claridad en la opinión de los docentes acerca de para qué sirve la matemática. Al respecto, Delia Lerner señala que los padres son más explícitos que los maestros cuando expresan que "la matemática sirve para todo":

"para la vida diaria, para hacer cálculos, presupuestos" y
"sirve para contar pesos, para resolver problemas, se utiliza en el supermercado", pero además
"en contabilidad, en cualquier trabajo está la matemática",
"si dominás la matemática se te facilitan otras materias, como física y química",
"se utiliza en el fútbol, en la comida, en la música... en todo".

Estas respuestas dan idea de algunos de los contenidos que deben incluirse en los niveles educativos elementales.

Después de consultar a importantes especialistas argentinos del área de la matemática y de su enseñanza, se seleccionaron y concertaron en el Consejo Federal de Cultura y Educación, en el año 1994, los Contenidos Básicos Comunes[12] correspondientes a cada nivel educativo de la República Argentina. Luego, cada jurisdicción elaboró su diseño curricular. La provincia de Buenos Aires distribuyó en todas las escuelas el Marco General y las orientaciones curriculares de inicial y EGB en el año 2002.

El propósito de la enseñanza del área es asegurar que el alumno aprenda en la escuela un *bagaje de conocimientos matemáticos junto con el desarrollo de las capacidades para que pueda seguir aprendiendo por sí solo*. Al mismo tiempo, es necesario que los estudiantes comprendan que el cuerpo de conocimientos matemáticos fue elaborado por hombres de todas las épocas y pueblos y que la matemática seguirá creándose mientras exista el hombre. De esta forma, los alumnos podrán valorar la matemática entendiendo el presente, sirviéndose del pasado y pensando en el futuro.

Mas que el conocimiento específico de determinados conceptos y técnicas matemáticas, lo que les servirá para la vida a los futuros ciudadanos son ciertas capacidades básicas que se desarrollan y consolidan mediante la actividad matemática[13].

[12] Los Contenidos Básicos Comunes constituyen el conjunto de saberes relevantes que integran el proceso de enseñanza en todo el país. Su exposición tiene fines exclusivamente enunciativos y representan el medio estratégico para poder organizar un sistema educativo descentralizado e integrado. Esto implica que, si bien cada jurisdicción define la forma para su organización, se asegura un nivel de formación semejante en todo el país y se garantiza la movilidad de los alumnos entre las distintas jurisdicciones.
[13] Muchas de ellas no se desarrollan únicamente a través del trabajo matemático, aunque puede considerarse que es un ámbito privilegiado para estos logros.

Como ejemplos de esas capacidades podemos enumerar: explorar, buscar informaciones, clasificar, encontrar semejanzas y diferencias entre situaciones problemáticas, analizar, plantear hipótesis, justificar, argumentar, generalizar, particularizar, explicar mediante analogías, expresarse con precisión, comunicar las propias ideas con claridad, intentar resolver situaciones nuevas con confianza en sus propias posibilidades, estar dispuesto a trabajar en conjunto y realizarlo con eficacia.

Como se afirma en un documento del Consejo General de la provincia de Buenos Aires[14]: ..."la educación matemática tiene fundamental incidencia en el desarrollo intelectual de los alumnos. El método particular de acceso al conocimiento matemático favorece el desarrollo de capacidades cognitivas necesarias para utilizar diversos caminos de razonamiento en la resolución de problemas". En el mismo documento se afirma que el eje de la actividad matemática lo constituyen las competencias de resolución de problemas y es en ellas que confluyen y se integran las capacidades cognitivas antes mencionadas. Estas posibilitan la apropiación del saber matemático como herramienta y colaboran en la estructuración del pensamiento mediante el desarrollo del razonamiento lógico.

Aunque al fijar los objetivos generales de la enseñanza de la matemática en los diferentes ciclos y/o niveles se hayan tenido en cuenta sus usos y aplicaciones, *nuestros alumnos de la EGB, ¿serán capaces de reconocer y usar en su vida adulta los aprendizajes adquiridos en la escuela?* Nuestra responsabilidad es que esto ocurra.

La relación entre la cultura y la matemática que debemos enseñar en la escuela

Tal como lo expresamos anteriormente, la matemática es una producción cultural. Distintos grupos sociales producen "diferente matemática" pues la crean para responder a variadas necesidades. ¿Cómo pueden los docentes establecer puentes que relacionen los conocimientos que los niños y jóvenes adquirieron de manera informal, con los saberes escolares ("universales")?

actividad 2

Antes de continuar con la lectura de este texto, plantéense cómo podrían establecerse los puentes entre los conocimientos informales y los saberes escolares. Los docentes que ya experimentaron en este tema pueden aportar su experiencia y dar ejemplos. ■

actividad 3

Sinteticen los productos de las Actividades 1 y 2 y establezcan las relaciones que puedan surgir del análisis de esta primera parte del documento. ■

Comparen el producto de la actividad anterior con la expresión de Gelsa Guikjnik[15]:

"Para quién enseñar matemática puede cambiar el para qué".

[14] Resolución 13.271 del Consejo General de la provincia de Buenos Aires.
[15] Educadora e investigadora matemática brasileña.

Como aporte a la tarea propuesta, diremos que además, la misma autora reflexiona sobre la relación existente entre cultura y pedagogía matemática, entre saber académico y saber popular. Su propuesta, que parte de una investigación en medios rurales de Brasil, consiste en que el aprendizaje de las matemáticas sea viabilizado a partir de la interpretación y codificación de las matemáticas populares pero reconoce, recíprocamente, que la apropiación de las "matemáticas de los libros" es lo que posibilita la comprensión de las prácticas matemáticas populares. Cuando se establece una articulación de los saberes locales (del contexto en el que viven los alumnos) con los más generales ("universales"), se constituye un "saber-síntesis".

Contextualizar los saberes "universales" no es tarea fácil, consiste en un delicado trabajo de compromiso docente, pero le da sentido a esos conocimientos y, de este modo, los alumnos sentirán que el docente valora los saberes de su entorno, de su comunidad. Siguiendo a Beyer y Liston, 1993: "lo local puede iluminar lo más general, y lo más global puede aumentar nuestra sensibilidad hacia lo más particular".

> Un ejemplo de estos saberes está representado por el método que utilizan los albañiles para determinar si los ángulos de una ventana son rectos. Miden 60 centímetros sobre un lado y 80 sobre el otro, al unir ambos extremos se obtiene el tercer lado de un triángulo que debe medir 1 metro para que el ángulo que determinan los dos primeros sea recto. No es otra cosa que un ejemplo práctico del conocido teorema de Pitágoras. [16]

Reconocer nociones o propiedades matemáticas en diferentes contextos sociales no es tarea fácil, pues se debe comprender cómo razonan el número, las operaciones o la medición en esos grupos sociales y para entender esto es necesario comprender su cosmovisión.

> Por ejemplo, los kpelle, un pueblo de Liberia, no miden las distancias largas utilizando palos ni objetos ni palmos sino que las describen en términos del tiempo que lleva recorrerlas.

Si los educadores en matemática tienen en cuenta las diversas concepciones, las diferentes maneras de comprender el mundo (por las variaciones culturales, encarnadas en diferentes modos de crianza, las variaciones propias de la edad y los matices dados por las variedades de desarrollo, variaciones socio-económicas, laborales, de género, entre otras), seguramente habrá menos fracasos en la escuela. De este modo se reconoce al contexto extraescolar, cualquiera sea, como productor de saberes significativos, saberes que los equipos docentes, necesariamente, deberán tener en cuenta a la hora de planificar el área de matemática en su institución.

El ida y vuelta entre las matemáticas escolares y las informales hará que la enseñanza de la matemática pueda contribuir a abrir caminos de reflexión conjunta, de conocimiento recíproco, de valoración de todas las culturas e historias familiares, de diferentes pueblos, de diferentes países, en síntesis, ciudadanos más comprensivos y más tolerantes.

[16] En nuestro medio, el método del albañil fue investigado por Gema Fioriti, especialista argentina en didáctica de la matemática.

Segunda parte

El abordaje de la matemática como área

En la provincia de Buenos Aires el modelo de organización de contenidos se estructura en áreas. "En este modelo, el Área Curricular es una estructura que integra contenidos, expectativas de logro, estrategias metodológicas, recursos, actividades y formas de evaluación. La justificación de la elección de esta organización depende de distintos factores: epistemológicos, pedagógico-didácticos y pragmáticos"[17], aspectos que se explicarán más adelante.

La relación entre los ejes propuestos en el Diseño Curricular bonaerense se verifica, por ejemplo, mediante el abordaje de problemas que, aunque de origen aritmético, para su solución, admiten el uso de diagramas o figuras (modelos geométricos). En este caso se relacionan el eje "Número y Operaciones" con el eje "Nociones Geométricas". Mencionamos otros ejemplos: los modelos de área para representar fracciones -como rectángulos que representan terrenos que se cultivan-, la recta geométrica para representar conjuntos numéricos, los gráficos estadísticos, etc. Algunos autores señalan que muchos alumnos piensan en palabras, mientras otros lo hacen en imágenes; entonces, deben utilizarse formas múltiples para comunicar las ideas matemáticas, de manera de mantener presente la diversidad de formas de pensamiento.

La interrelación se produce, tal como explicamos anteriormente, por las diferentes presentaciones de un mismo concepto dentro de la matemática, pero también puede ocurrir que un mismo concepto, como el de proporcionalidad, se relacione con diferentes ejes temáticos de la matemática. La proporcionalidad *directa* está directamente vinculada con la semejanza (la construcción de escalas, planos, mapas y maquetas, los cambios de escalas) y los porcentajes utilizados en estadística. Otras vinculaciones aparecen en las recetas de cocina, en la composición de los alimentos, en la administración de los medicamentos y en los repartos proporcionales con algún criterio.

Muchos problemas de medidas conducen a los alumnos a la comprensión de la proporcionalidad, tanto directa como inversa. Cuando se miden diferentes objetos con una misma unidad se obtiene la proporcionalidad directa. En cambio, al medir un mismo objeto con diferentes unidades se obtiene una relación de proporcionalidad inversa. Las equivalencias de unidades se obtienen mediante relaciones de proporcionalidad inversa. (Véase Anexo I).

La proporcionalidad se relaciona con otras áreas del conocimiento, tal como las ciencias sociales y las naturales. Planos, mapas y gráficos estadísticos se utilizan en las ciencias sociales; de esta forma, la matemática proporciona la herramienta para resolver algún problema planteado desde esta disciplina, que a su vez aporta el contexto que le da sentido y significación al contenido matemático. Las simetrías, el estudio del crecimiento de poblaciones o de individuos de alguna especie, son ejemplos del vínculo entre los conocimientos matemáticos y las ciencias naturales.

[17] Consejo General de Cultura y Educación. *Documento Curricular N° 2*, Buenos Aires, 1996.

actividad 4

Piensen una situación que pueda ser resuelta desde diferentes ejes y escriban la consigna correspondiente.
Aclaren cuáles son los contenidos involucrados de cada Eje y el año de la EGB en que se podría poner en práctica para que represente un problema. ■

Esta propuesta de relaciones entre ejes temáticos y de contenidos de los ejes responde al modelo de organización por áreas planteado en el diseño curricular provincial, que se diferencia de otras organizaciones en las que se toma la matemática como materia o como disciplina.

Cuando en los fundamentos del Marco General, en las consideraciones sobre la concepción de la enseñanza, se habla del *enfoque globalizador,* se plantea una "forma de captación de la realidad en la que se comprende el todo, en la interacción de las partes que lo conforman", una mirada totalizadora que requiere la construcción de sentido desde el punto de vista del sujeto que aprende, en este caso, el alumno.

También se puede considerar la globalización desde el diseño de situaciones que elabora el docente, particularmente en relación con la organización de los contenidos. Esta organización debería partir de una situación próxima a la realidad del alumno, que le resulte interesante y que le plantee cuestiones ante las cuales tienen que encontrar una respuesta, es decir, los problemas. En cualquier unidad de intervención pedagógica (unidades didácticas, secuencias didácticas, proyectos) es en los problemas en los que aparecen los diferentes aspectos de los contenidos. La diversidad de aspectos que permiten poner en juego los diferentes problemas posiblitan la adquisición de variadas significaciones de los conceptos. Por ejemplo, el concepto división en los números naturales comprende algunos de los siguientes aspectos: la división como reparto, que es prácticamente la única que se enseña en la escuela, como partición en partes iguales, como proporcionalidad, organizaciones rectangulares, combinatoria. Todos los problemas posibles relacionados con estos aspectos se deben proponer a los alumnos.

Ese conjunto de propuestas con una secuencia adecuada y acordadas por el equipo docente, junto a la interacción social de los alumnos y las diferentes intervenciones del docente, configuran las prácticas con las que cada alumno construirá el sentido de ese concepto.

Enfoque didáctico del área

> No hay nada más básico en una disciplina que su modo de pensar. No hay nada más importante en su enseñanza que proporcionar al niño una temprana oportunidad para aprender ese modo de pensar: las formas de relacionar, las actitudes, anhelos y bromas y decepciones que la acompañan. En una palabra: la mejor introducción a un tema es el tema en sí. Desde el primer momento, el joven estudiante debe tener oportunidad de solucionar problemas, hacer conjeturas, oponerse tal y como todo ello se lleva a cabo en el fondo de la disciplina. ¿Cómo puede lograrse?
>
> Jerome S. Bruner. *Hacia una teoría de la instrucción*

Las prácticas generalizadas en el primero, segundo y tercer ciclo de la EGB ponen en evidencia que los docentes hacen, en general, uso del problema como medio o recurso de aplicación de los contenidos disciplinares. En muy pocos casos se parte del planteo de situaciones problemáticas para la enseñanza de nuevos contenidos y más escasa es aún la discusión y la reflexión sobre los problemas y la enseñanza de la resolución de estos.

En la enseñanza de la matemática tradicional el problema se ubica al final de la secuencia de aprendizaje, se considera al docente como el depositario de los saberes que se aprenden por repetición y memorización de las nociones matemáticas, que el educador inicialmente introduce a través de los ejercicios de aplicación. El problema aparece al final de la secuencia didáctica. Esto implica –para el alumno– utilizar lo aprendido y –para el docente–, controlar el aprendizaje de los alumnos.

En general, dentro de esta concepción, se entiende por problema a los enunciados verbales en los que la incógnita está especificada, se ofrece la información específica necesaria para calcular la respuesta, sugiriéndose un procedimiento correcto para hallar la solución.

En el Diseño Curricular se sostiene que el enfoque central para la enseñanza del área es la resolución de problemas. Sin embargo, a diferencia de cómo se utilizan los problemas en la enseñanza clásica, se busca que la *resolución de problemas favorezca la construcción de conocimientos matemáticos,* en la medida en que estos conocimientos sean las herramientas para resolver los problemas propuestos. Este enfoque para la enseñanza de la matemática permite darle la oportunidad al alumno, de acuerdo con sus posibilidades, de comenzar a apropiarse del modo de producción del conocimiento matemático. A partir de resolver problemas puede utilizar saberes ya adquiridos, ampliar otros, inventar procedimientos, justificar la elección de determinadas estrategias, reflexionar sobre los nuevos instrumentos elaborados, buscar formas para representarlos, fundamentar el producto de la actividad realizada.

La resolución de problemas, además, debe ser considerada *como un contenido a ser enseñado*, es decir, que se debe reflexionar, entre otros aspectos, acerca de:

- la falta o sobreabundancia de datos para resolver el problema,
- la pertinencia de las preguntas en relación con el enunciado,
- la formulación de hipótesis,
- la movilización de los saberes matemáticos necesarios,
- la planificación de estrategias de resolución,
- la estimación de resultados,
- la validez de la solución hallada,
- el análisis de las diferentes formas de expresión para comunicar tanto las estrategias utilizadas como los resultados.

Resumiendo: La transformación sustentada para el área se fundamenta en una concepción de aprendizaje que busca la construcción de los conocimientos a través de la resolución de problemas.

Pero cabe preguntarse:

a. ¿Todo problema es un problema?

b. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir una situación para que posibilite a los alumnos aprender cierto concepto o procedimiento?

c. ¿Cómo debe actuar el docente?

d. ¿Qué exige la resolución de problemas a los alumnos?

Las preguntas "a" y "b" serán abordadas en esta segunda parte y dejaremos las preguntas "c" y "d" para la tercera parte.

Pregunta "a": ¿Todo problema es un problema?

Si bien coexisten diferentes definiciones acerca de lo que es un problema, podemos acordar, en principio, que un problema es todo aquello que genere un obstáculo a vencer, toda situación para la cual no se disponga de una respuesta inmediata, cuando un alumno no encuentra inmediatamente un camino que le permita relacionar los datos del problema con la respuesta que finalmente quiere dar, etcétera.

Tipos de problemas

"Todos los problemas no son iguales; podemos en principio señalar tres grandes tipos:

a. los que permiten construir y dar significado a nuevos recursos matemáticos;

b. los que permiten la reinversión de los conocimientos en otros contextos, favoreciendo la resignificación, incluyendo también los que permiten controlar su adquisición; y finalmente,

c. los que podríamos llamar de investigación, donde la búsqueda es más libre y no se conoce *a priori* un procedimiento estándar de resolución". (Véase Saiz, I., *Fuentes para la transformación curricular.* Buenos Aires, MCyEN, 1994).

Roland Charnay señala una tipología de problemas que amplía la anterior, caracterizada por los objetivos de aprendizaje que se persiguen:

- los problemas destinados a involucrar a los alumnos en la construcción de nuevos conocimientos (a menudo llamadas situaciones-problema);
- los problemas destinados a permitir a los alumnos la utilización de los conocimientos ya estudiados (a menudo llamados problemas de reinversión);
- los problemas destinados a permitir a los alumnos la extensión del campo de utilización de una noción ya estudiada (llamados a veces problemas de transferencia, con toda la ambigüedad de esta palabra);
- los problemas más complejos en los cuales los alumnos deben utilizar conjuntamente varias categorías de conocimientos (a veces llamados problemas de integración o de síntesis);
- los problemas cuyo objetivo es permitir al docente y a los alumnos conocer el estado de conocimientos (problemas de evaluación);
- los problemas destinados a poner al alumno en situación de investigación y por lo tanto de desarrollar competencias metodológicas (problemas abiertos).[18]

El autor señala las limitaciones de esta tipología; ya que no todos los problemas quedan representados en esta clasificación, pero además:

[18] Charnay, R., «Problème ouvert, problème pour chercher», en *Grand N*, Nº 51, Grenoble, IREM, 1993.

Un mismo problema, según el momento en que sea presentado puede pertenecer a una u otra de las categorías.
Un gran desafío para los docentes es mantener un buen equilibrio en la presentación de los diferentes tipos de problemas y asegurar a la vez, a lo largo de la escolaridad, el logro de un aprendizaje significativo de la matemática.

actividad 5

Para esta actividad, véase el Anexo II, en el que se reproduce la Unidad 3 "Las Operaciones" del *Manual Plus 5,* Área Matemática.[19]
Analicen la secuencia presentada por las autoras y cómo utilizan los problemas. Además, especifique la categoría según la clasificación anterior. ■

actividad 6

Para los Directivos:
Analicen los problemas que los docentes de su escuela utilizan y establezcan la clase más frecuente. Elaboren las orientaciones que pueden brindar a los docentes para que usen otros tipos de problemas con mayor frecuencia. ■

Pregunta "b": ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir una situación para que posibilite a los alumnos aprender cierto concepto o procedimiento?

"Para asegurar ciertas relaciones del alumno con el conocimiento y llevar a cabo un trabajo como el que se propone, es necesario seleccionar las situaciones problemáticas con ciertas condiciones. Regine Douady enuncia algunas de ellas:

a. El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno.

b. El alumno debe poder considerar lo que puede ser una respuesta al problema. Esto es independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o la validación de una propuesta.

c. Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede iniciar un procedimiento de resolución, pero la respuesta no es evidente, esto quiere decir que no puede proveer una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduce a preguntas que no sabe responder inmediatamente.

d. El problema es rico, esto quiere decir que la red de conceptos involucrados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda abarcar su complejidad, si no solo, por lo menos en equipo o en el seno del equipo o de la clase.

e. El problema es abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantearse o por la diversidad de estrategias que puede poner en acción.

f. El conocimiento que se desea lograr con el aprendizaje es el recurso científico para responder eficazmente al problema. Dicho de otro modo, es un recurso adaptado a la situación.[20]

[19] Cf. Manual Plus 5, Buenos Aires, Plus Ultra, 1995 pp. 491 a 502. Los capítulos del área de Matemática fueron escritos por Lucrecia Iglesias, Mónica Agrasar de Copello y Norma Sanguinetti de Saggese.
[20] Douady, R., «Rapport enseignement apprentissage: dialectiques outil-objet, jeux de cadres», en *Cahier de didactique des mathèmatiques,* Nº3, IREM, Université Paris VII.

Las nociones de complejidad y apertura son relativas al alumno. Un problema es rico y abierto para una clase si lo es para la mayoría de los alumnos.

Además, las condiciones c), d) y e) impiden que el problema sea recortado en preguntas demasiado pequeñas".[21]

Damos un ejemplo de cada una de las cualidades.

Enunciar estas cualidades comunes a los buenos problemas tiene dos intenciones: por un lado, orientar la selección y el diseño de situaciones problemáticas adecuadas; por otro lado, aportar pautas que permitan revisar críticamente y mejorar los problemas que habitualmente se presentan a los alumnos.

a. El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno. Es decir, los saberes que el alumno posee le permiten comprender de qué se trata (lo cual no significa que se le ocurra inmediatamente una solución).

Por ejemplo, observemos un problema propuesto por una docente a sus alumnos de 7º año, cuyo contexto era familiar para los alumnos, debido a que:

- En Ciencias Sociales estaban trabajando las civilizaciones antiguas: Roma, Grecia, Mesopotamia y Egipto. Su organización económica, social, cultura, literatura, arte, etc. Así citaron libros como *La Ilíada*, *La Odisea* y *La Eneida*. Este último fue el texto más representativo del género épico en Roma. El poema relata las aventuras de su protagonista, Eneas, en su trayecto de Troya a Italia. Su autor, Virgilio, vivió entre los años 70 y 19 a. C. y fue apadrinado por Mecenas, un noble ministro del emperador Augusto. El texto es un homenaje a este monarca, descendiente del héroe troyano Eneas. Los alumnos realizaron un breve análisis del contenido de este libro.

El problema era el siguiente.

Actividad para los alumnos

En *La Eneida*, Virgilio cuenta cómo la reina Dido fundó la ciudad de Cartago. Llegó con sus gentes al norte de África y allí compró a los habitantes de la región un trozo de tierra, el que se pudiese limitar con una piel de toro. Dido hizo cortar la piel formando una gran tira y, extendiéndola sobre la tierra, determinó una porción de ella nada despreciable. Así comenzó Cartago. ¿Qué forma le convenía a Dido dar a la piel de toro sobre la tierra para obtener una parcela lo más grande posible?

actividad 7

Antes de continuar con la lectura resuelvan el problema anterior. ■

En principio, el enunciado del problema sobre la fundación de Cartago tiene sentido para los alumnos que disponen de la noción de área; quienes carecen de ella no pueden comprender qué es lo que el problema demanda.

b. El alumno está en condiciones de imaginar aquello que puede ser una respuesta al problema. O sea: está en condiciones de imaginar bajo qué condiciones el problema quedaría resuelto. Carecen de esta cualidad aquellos problemas en que los alumnos se entregan a un activismo descontrolado (dibujan, hacen cuentas, usan los resultados obtenidos para hacer nuevas

[21] Saiz, I., *Fuentes para la transformación curricular*, Buenos Aires, MCyEN, 1994.

cuentas), hallan la solución, pero no la reconocen como tal, "se pasan de largo", se sorprenden cuando el docente les señala que "ya está"; o aquellos problemas en los que, por el contrario, los alumnos hacen un cálculo o una figura, y los dan por resueltos, aunque no llegaron a la solución que se requiere. Imaginar aquello que puede ser una respuesta es condición necesaria para concebir una estrategia de resolución, aunque no la garantiza.

En el ejemplo de la fundación de Cartago, el producto que se espera como solución al problema es la forma que le deben dar a la piel de toro para que ocupe la máxima superficie; reconocer qué es lo que se busca no equivale a saber cómo encontrarlo.

c. En función de sus conocimientos, el alumno puede comprometer un procedimiento, intentar un camino, atinar a hacer algo (aunque la respuesta no es evidente ni inmediata y el alumno no puede alcanzarla sin desarrollar una argumentación que lo conduzca a ella a partir de los datos disponibles).

En el ejemplo, el alumno puede hacer varios dibujos geométricos y buscar una unidad para comparar sus áreas; tomar un hilo, formar distintas figuras y estimar las áreas; realizar figuras geométricas con perímetros constantes, cuadricularlas y calcular el área.

d. El problema aporta datos considerables. Esto quiere decir que la red de conceptos que incluyen es importante; a la vez, debe ser posible para el alumno abarcar su complejidad, si no lo hace solo, al menos en el seno del equipo o de la clase. En otras palabras: suelen ser poco problemáticos los problemas centrados en un único concepto.

El problema involucra conceptos tales como: figuras geométricas, perímetro mínimo, área máxima.

e. El problema es abierto, por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantear o por la diversidad de estrategias que puede poner en juego y por la falta de certidumbre que de esto resulta. Las situaciones que sólo admiten un camino posible, un único procedimiento de resolución, una sola pregunta, no merecen llamarse problemas.

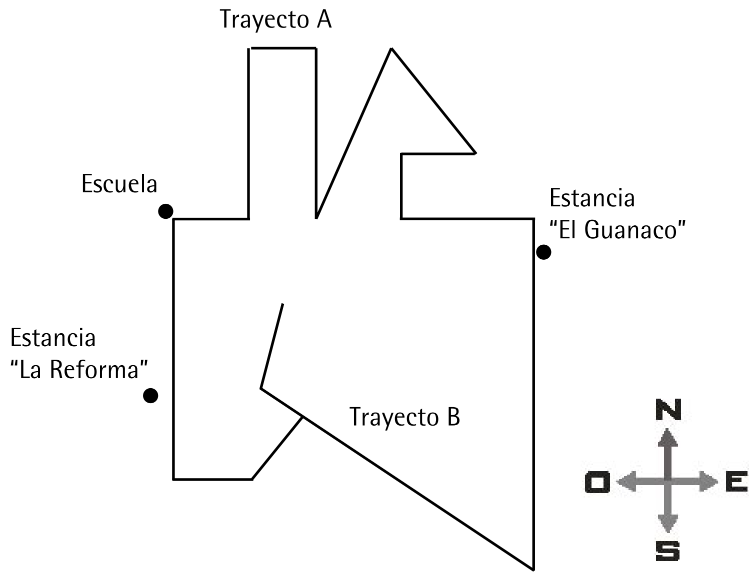
En el ejemplo considerado, resultan claves las preguntas que apuntan a detectar qué figuras geométricas se pueden realizar, cual será la que tendrá mayor área si utilizamos la misma medida de perímetro. Con respecto a los procedimientos que el alumno puede utilizar, ya mencionamos algunos de ellos en el punto c).

f. El conocimiento al que se apunta en el aprendizaje es el medio científico de responder eficazmente al problema. Lo que el docente pretende enseñar es el recurso o el instrumento más adecuado para la resolución, el más eficiente, el que permite ahorrar tiempo y esfuerzo y, aunque otros recursos menos elaborados también sirvan para resolver el problema, justamente, la tarea del docente consiste en hacer progresar a los alumnos desde estos recursos menos sistemáticos, menos formalizados, hacia el recurso que mejor se adapte a la situación.

Volviendo al ejemplo: la noción de círculo y la fórmula que da el área de esta figura son los recursos más ajustados para tratar la situación. Previamente el alumno comparará áreas de distintas figuras.

actividad 8

Dada la siguiente situación problemática, diseñada para alumnos de 7º año analicen si se verifican las condiciones que deben cumplir los problemas, tal como las enunció Douady. ■



En el dibujo están representadas la escuela y el casco de la estancia "El Guanaco", donde vive Juan. Todos los días, Juan hace el mismo recorrido para ir a la escuela. Hoy descubre que hay otro camino que también conduce a la escuela.

1. Marcá el camino más corto con color. (Para esto no podés utilizar la regla).
2. ¿Cómo te diste cuenta de que es el más corto? Buscá una manera de demostrarlo.
3. ¿Con qué instrumento podríamos medir el trayecto real que Juan recorre todos los días? Subrayá los correctos: termómetro – reloj – regla graduada – soga – metro de carpintero – pasos – cinta métrica – vaso graduado – cuentakilómetros del auto de tu papá.
4. Juan escucha varias indicaciones de su familia:
   - Su hermano le dice que conviene seguir el camino en cuyo primer tramo hay que dirigirse hacia el sur.
   - Su mamá le propone mirar el reloj y medir el tiempo que tarda en cada recorrido. De esta manera, sabrá cuál camino es el más corto.
   - Su papá le sugiere ir en camioneta y poner el cuentakilómetros.

   ¿Estás de acuerdo con la ayuda que le propone su familia? Justifica en cada caso.
5. Mirando el dibujo, si tuvieras que indicarle a un compañero dónde queda el casco de la estancia donde vive Juan con respecto a la escuela, ¿te puede resultar útil la siguiente indicación? "Salí de la escuela, dirigite hacia el sur, luego girá al este, y luego desviate hacia el noreste. Te vas a encontrar con una bocacalle donde tenés que tomar el camino que va hacia sudeste y luego seguí derechito hacia el norte". ¿Cuál de los caminos se está indicando? ¿El trayecto A o el trayecto B? ¿Cómo harías para indicarle a tu compañero el otro camino que conduce al casco?
6. Un alumno de 6° año ideó una estrategia para comparar la distancia entre los dos caminos. Utilizó una escala: 1 centímetro en el papel equivaldría a 20 kilómetros reales.

   ¿Te parece acertada la estrategia que utilizó para saber cúal es el camino más corto?

   a. Según esta escala, ¿cuántos kilómetros hay en cada trayecto? ¿Cómo los calculaste? ¿Este cálculo te sirve para saber cuáles son los kilómetros reales entre la escuela y la casa de Juan?

   b. ¿La escala también podría ser esta: 1 cm = 150.000 cm? ¿Por qué?
7. Juan, con la ayuda de su papá, ya pudo solucionar su problema. El cuentakilómetros de la camioneta dio los siguientes resultados:

   A =14,2 km   B= 18,5 km

   De esta forma pudo verificar si lo que había hecho antes estaba bien.
8. Estas son las medidas del trayecto A y B que encontraron los chicos de 8° año. Las expresaron de la siguiente manera.

TRAYECTO A	TRAYECTO B
14.200 m - 142 km - 142.000 dm	185 hm - 18 km y 5 hm
142 km - 14 km y 2 hm	1850 dam
1 km y 42 hm-	18 km y ½ hm

¿Estás de acuerdo con ellas? Marcá las correctas.

9. Si tuvieras que construir un camino más corto desde la casa de Juan hacia la escuela ¿cómo harías?. Marcalo en el dibujo.
10. Ahora que ya conocés la cantidad de kilómetros que hay en los dos trayectos que comunican la casa de Juan con la escuela, construí un plano utilizando una escala adecuada.
11. Marcá en el plano anterior el tercer camino, o sea el más corto. Calculá según la escala que utilizaste anteriormente la cantidad de kilómetros que hay.
12. Imaginate que este plano está dibujado sobre papel cuadriculado y que el origen de coordenadas está en la estancia "La Reforma". ¿Cuáles serían las coordenadas de la escuela y de la casa de Juan?

> No es suficiente plantear a los alumnos resoluciones esporádicas de problemas ni presentar una o dos situaciones aisladas para construir condiciones favorables para el aprendizaje.

Es necesario construir progresiones, secuencias de situaciones en la que se involucren la mayor cantidad de contenidos posibles, de manera tal que permitan a los alumnos una construcción progresiva de procedimientos y que puedan reutilizarlos o mejorarlos en otras situaciones.

Tercera parte

Hasta ahora tratamos todo lo relacionado con los problemas y las condiciones que deben cumplir. En esta parte, analizaremos las acciones del docente y de los alumnos dentro del marco del enfoque de resolución de problemas.

Pregunta "c": ¿Cómo debe actuar el docente?

En lo trabajado hasta este momento[22] se ha perfilado el importante rol que debe jugar el docente en el enfoque para la enseñanza de la matemática, en el ámbito de la provincia de Buenos Aires.

> Es conveniente que el docente:
> analice los diferentes contextos de uso de los conceptos con los que trabajará; seleccione las situaciones que presentará a los alumnos; analice y prevea las formas de organización que establecerá en la clase; anticipe las posibles formas de representación y los procedimientos que utilizarán los alumnos ; considere los errores que puedan cometer y las intervenciones que debería realizar a partir de estos o de los procedimientos que pusieron en juego los alumnos para analizarlos y jerarquizarlos; promueva que los procedimientos más importantes pasen al dominio de todos; conduzca la clase; aliente a los alumnos; haga circular el saber entre estos, institucionalice[23], etcétera.

El análisis de los contextos y de las situaciones

En relación con "analizar los diferentes contextos de utilización del concepto que se decidió trabajar" vamos a realizar un primer nivel de análisis que exige desplegar, a propósito de un concepto que se desea enseñar, un conjunto –lo más exhaustivo posible– de problemas diferentes que este permite resolver.

Detengámonos, por ejemplo, en estos problemas para el tercer ciclo:

[22] Para profundizar en el Anexo III se adjuntan guías de lectura de textos que, aunque sabemos conocidos, nos interesa focalizar en su lectura: Parra, C., "Las poderosas reflexiones de los chicos", en *Los CBC en la enseñanza de la matemática*, Buenos Aires, A-Z editora, 1997.
Charnay, R., "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en *Didáctica de la Matemática,* Buenos Aires, Paidós, 1994.

[23] El momento de institucionalización es cuando el maestro *remarca* a sus alumnos el producto que han obtenido.

- Si hoy es miércoles, ¿qué día de la semana será dentro de 1052 días?
- Buscá cuentas de dividir en las cuales el cociente sea 150 y el resto 2 ¿Cuántas hay?
- Proponé una cuenta de dividir en la que el divisor sea 7 y el resto 2 ¿Hay una sola? ¿Cuántas hay? ¿Por qué?
- En un galpón de empaque el elevador carga 150 bolsas de cebolla. Si quedaron dos bolsas sin cargar y se realizaron 7 viajes, ¿cuántas bolsas había? ¿Cuántos viajes se deben hacer para trasladar las bolsas?
- Se repartieron en forma equitativa etiquetas de cebolla entre los 7 embaladores y sobraron 2 ¿Cuántas etiquetas tiene cada embalador? ¿Cuántas etiquetas se repartieron?

Los cinco enunciados involucran la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto, es decir, $D = C \times d + R$. Estos problemas involucran la división. Sin embargo, se trata de problemas muy diferentes para cuya resolución resulta insuficiente conocer solamente la definición de división. No pueden pensarse entonces –en el momento de la enseñanza- como meras aplicaciones de un concepto ya dado, sino como partes constitutivas de la significación del mismo.

Ante un problema como el segundo, los alumnos buscan por ensayo y error los valores del dividendo y divisor. Solo algunos se dan cuenta de la relación. En el primer ejemplo, es difícil que los alumnos reconozcan una división. Lo más usual es que resuelvan la situación analizando calendarios o restando de 7 en 7. Otra opción sería, (como lo hizo un alumno de 7º año) imaginarse el mismo problema con números más pequeños y después generalizando llegar a realizar el mismo procedimiento en el problema propuesto. Se plantea entonces un desafío didáctico: ¿cómo favorecer que los alumnos den un salto desde este procedimiento –muy antieconómico– hacia el reconocimiento de la división involucrada? La división entera debe ser un objeto de trabajo en el tercer ciclo. La intención es que los alumnos enfrenten una nueva variedad de situaciones a través de las cuales deban volver a analizar la relación $D= C \times d + R$. En este ciclo, la división no solo permitirá resolver problemas de reparto e iteración, sino también, analizar y anticipar resultados. Es decir, se intentará que los alumnos puedan centrar el análisis en las condiciones que cumple cada uno de los números que intervienen en la fórmula $D = C \times d + R$ $(r < d)$, haciendo explícitas ciertas características de la relación. La pregunta anterior se puede generalizar:

> ¿Cómo pasar de las representaciones parciales y fragmentadas que tienen los alumnos del significado de un concepto a representaciones más abarcativas y completas?
> Un primer aspecto es:
> brindar la oportunidad de emplear el concepto en cuestión en la mayor cantidad de situaciones diferentes para las cuales este es un instrumento adaptado.
> Pero esto no es suficiente; además, es necesario:
> propiciar que los alumnos establezcan relaciones entre las distintas clases de problemas, de manera de entender por qué todos se resuelven utilizando el mismo concepto.

En otras palabras, los alumnos deben poder comenzar a responderse la siguiente pregunta: ¿qué es lo que tienen en común estos distintos problemas, dado que todos admiten una misma representación matemática?

Para ello será necesario organizar actividades en las que el estudiante, a propósito de un conjunto de problemas:

- decida en qué casos el concepto sobre el que se está trabajando resulta adecuado para resolver el problema y en qué casos no,
- proponga otros problemas parecidos a los que ya se analizaron,
- clasifique los enunciados que aportan sus compañeros.[24]

Para el primero y segundo ciclo podrían utilizarse propuestas del tipo de las que siguen.

Actividades para entregar a los alumnos

1. Laura tiene 18 pesos. Esto es 3 veces la cantidad de dinero que tiene Rosa. ¿Cuánto dinero tiene Rosa?
2. En la feria venden 3 manzanas por 1 peso. Irma compró 18 manzanas. ¿Cuántos pesos gastó?
3. Pablo tiene 3 pesos. Juan tiene 18 pesos. ¿Cuántas veces la cantidad de dinero de Pablo es la cantidad de dinero de Juan?
4. Luis compró 18 pañuelos y le costaron 3 pesos. En esa tienda, ¿cuántos pañuelos dan por 1 peso?
5. En una fiesta le regalaron 3 bolsitas de dulces a cada niño. Se regalaron 18 bolsitas. ¿Cuántos niños había?
6. Combinando sus pantalones y camisas Juan puede vestirse de 18 formas diferentes. Si tiene 3 pantalones, ¿cuántas camisas tiene?

Aunque no son problemas de reparto, todos se resuelven mediante la operación 18: 3. Desde la perspectiva de los problemas como *aplicaciones de conceptos ya elaborados por los alumnos*, son idénticos y se resuelven con la misma herramienta: la división. En cambio, desde el punto de vista de la *comprensión de la situación* y de las posibles *estrategias*, tanto para el planteo como para su resolución, los problemas de la lista anterior son diferentes entre sí.

Si proponemos problemas diversos como los que anteceden, los alumnos establecen relaciones diferentes en cada caso. Esto permite mejorar y profundizar la comprensión del concepto *división*, lo que no sería posible solamente con la definición o el algoritmo.

En primer lugar, en la redacción de los enunciados no aparecen "pistas", palabras que remitan a la operación división; por otra parte, estos problemas presentan distintos universos a los que se refieren las cantidades y distintas relaciones entre ellos. Esto conducirá a estrategias de solución muy variadas:

- En el primer problema, se necesita partir una cantidad (18 pesos) en tres conjuntos de igual cantidad de elementos y se desconoce la cantidad de elementos de cada conjunto.
- En el problema número 3, aunque parece similar al anterior, se desconoce la cantidad de conjuntos pero se sabe cuántos elementos corresponden a cada uno. A diferencia del anterior, este problema se puede resolver también por restas reiteradas.

[24] Parra, C., Saiz, I. y Sadovsky, P., *La matemática y su enseñanza*. Buenos Aires. *PTFD, MCyEN*, 1994.

- El problema número 5 es análogo al 3 en cuanto a este análisis, pero involucra más de un universo.

- Los problemas 2 y 4 presentan dos universos relacionados. La presencia de la unidad en ambos enunciados seguramente sugerirá planteos y estrategias de solución muy diferentes a los casos anteriores.

- El problema número 6 presenta varios universos y es un caso de combinación. En cuanto a las estrategias, lleva a trabajar con diagramas con flechas así como también con tablas de doble entrada.

Los diferentes procedimientos resolución empleados por los alumnos, acompañados por la intervención del docente, conducirán al reconocimiento de todos estos problemas como problemas de división.

Como suele suceder, para que un maestro pueda realizar este tipo de trabajo con sus alumnos, necesita disponer de las herramientas adecuadas:

- haber investigado algunos contenidos y realizado un análisis exhaustivo de los tipos de problemas en los que el contenido es reconocido como el medio de solución;

- haber tomado conciencia del papel que este análisis juega en el proceso de reorganización del conocimiento;

- acceder a este análisis de manera autónoma –por ejemplo, a través de la lectura de producciones de la didáctica de la matemática– para otros contenidos que no ha tenido la oportunidad de abordar en el momento de su formación.

actividad 9

Construyan un listado, lo más exhaustivo posible, de contextos en los que se utiliza el concepto de fracción e indiquen cuál es el significado de las fracciones en cada uno de ellos.
Luego de elaborarlo, consulten y comparen sus propias respuestas con el documento de Malet, O., "Ejemplos orientadores. Área de Matemática", en *Orientaciones para interpretar resultados y tomar decisiones institucionales* La Plata, Programa de Evaluación de la Calidad de la Provincia de Buenos Aires, Segunda Serie de documentos, DGCyE, 2001. (Véase Anexo IV).
Otros textos que pueden consultar:
Pujadas, M. y Eguiluz, L., *Fracciones ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula*. Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas, 2000.
AAVV, *La enseñanza de las fracciones en la Educación General Básica*. UNESCO, Buenos Aires, www.utenet.com.ar/planestrat/default1.htm, Publicaciones, Red de escuelas, Módulos/informes, Fracciones).
Revista En el aula Nro. 2, editada por el MCyEN, www.mcyen.gov.ar, Publicaciones. ■

Los procedimientos de los alumnos

Es importante que el maestro anticipe los procedimientos[25] de resolución que utilizarán sus alumnos frente a una situación dada, es importante destacar que este es uno de los "controles" de los cuales dispone el docente para asegurarse de que esa situación es un problema, considerando que un problema es una situación para la cual no se dispone inmediatamente del procedimiento convencional, a la hora de resolverlo.

Al plantear las primeras situaciones, con el objetivo de que el alumno se apropie de un conocimiento nuevo, aparecerán procedimientos centrados en los conocimientos previos que ese alumno posee, ya que el mismo aún desconoce la herramienta matemática que el maestro le enseñará en la fase de institucionalización.

En el proceso de resolución, las estrategias que el alumno utiliza habitualmente deberán aparecer como insuficientes de manera evidente, ya sea porque son muy costosas, porque conducen a errores o porque al confrontarlas con otras estrategias, desarrolladas por sus compañeros, aparecen como menos eficientes.

> Al considerar la resolución de cinco problemas de división para el tercer ciclo (p. 30) que se enunciaron precedentemente como ejemplo, se podría encontrar algunos alumnos que, en un primer momento, para el tercer ejemplo, intentaran resolverlo reproduciendo la situación con números más pequeños; probando por ensayo y error; buscando valores para el dividendo, realizando la cuenta e intentando corregir, mediante ensayo y error, el valor del dividendo de manera de aproximarse a la solución; o que atribuyan arbitrariamente un valor al cociente, lo multipliquen por el divisor y sumen el resto a este resultado para obtener el dividendo. Sin embargo, no puede esperarse que la mayoría realice de entrada este procedimiento. Esta situación muestra algo muy particular: la posibilidad que tienen los alumnos de aceptar que ellos pueden atribuir valores arbitrarios al cociente y analizar que estos valores son independientes del resto y del divisor. Este problema contribuye a una reconceptualización de la división entera, en la medida en que aparece la noción de variable, es decir, se modifica el valor del cociente y por lo tanto el valor del dividendo. En el caso del primer problema, buscando un calendario, escribiendo todos los días de la semana, haciendo restas sucesivas, etc. Estos procedimientos, que pueden ser exitosos para resolver situaciones que involucran cantidades pequeñas, se revelarían como insuficientes al ser generalizados a cantidades mayores; justamente es esta evidencia lo que promoverá el avance en los procedimientos y el acercamiento progresivo a las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto.

Este aspecto remarca la diferencia entre el enfoque que propone comenzar enseñando la relación $D = C \times d + R$ para luego dar los problemas de aplicación de "eso que ya se sabe" y el enfoque jurisdiccional de la didáctica de la matemática. Los problemas que se proponen en el enfoque tradicional admiten, en general, un solo procedimiento de resolución.

Recordemos otro ejemplo, extraído de la bibliografía sugerida, en el que los niños de segundo han estado trabajando con problemas de suma y resta y la maestra les plantea un problema que dice:

[25] Llamaremos procedimiento a la forma que el alumno utiliza para interpretar y tratar los datos del problema, según Vergnaud, G. y Ricco, G., investigadores franceses en didáctica de la matemática.

La cooperadora va a comprar doce cuadernos, cada uno cuesta cinco pesos. ¿Cuánto va a gastar en esta compra?[26]

Cecilia Parra dice que, posiblemente, algunos chicos escribirán 5 más 5, más 5 más 5... doce veces, algunos utilizarán otros recursos para averiguar el resultado, como, por ejemplo, contar de 5 en 5 usando lo que saben de la escala del 5: 5, 10, 15, 20 y así llegan a establecer cuánto gastará la cooperadora. Otros, pueden reunir los cincos de a dos para formar dieces. En estos casos, los chicos se pusieron a pensar el problema y usaron los recursos que poseen, en este caso la suma, pues la multiplicación no ha sido trabajada y no conocen los productos. Los alumnos apelan a lo que conocen y lo ponen en juego para resolver la situación. También es posible que haya algunos chicos que escriban, en virtud del enunciado en el que figuran dos números, un doce y un cinco: 12 + 5.

Los errores de los alumnos

Quienes resuelven el tercer ejemplo del tercer ciclo (p. 30) encontrando como divisor al 2 y como dividendo al 150, no tienen control sobre la situación, y lo que ocurre es que prevalece en ellos la idea de que hay que usar los números. Los números que están en el enunciado hay que usarlos para resolver el problema y, como hasta ahora venían realizando C x d + R = D, extendieron este procedimiento y encontraron otra posible solución pero no analizaron que, para que la cuenta esté correcta, el resto debe ser menor que el divisor, en este caso el divisor 2 no es menor que el resto 2 .

¿Cómo puede el docente ayudar a estos alumnos?

Una buena idea es, por ejemplo, hacerles releer el problema y solicitarles que indiquen cuál es el significado de cada uno de esos números y que analicen cada uno de los términos, que traten de reconocer qué se sabe y qué se busca saber, que vean con qué cuentan para resolver la situación. Otro modo consistiría en que el docente organice la presentación en la clase de todas las soluciones –las correctas y las incorrectas– y que todos puedan explicar lo que hicieron y, especialmente los que se equivocaron, que puedan explicar por qué la suya no es la solución correcta del problema.

Seguramente en una clase no se comprenderá todo. En general, los procesos comprensivos son largos. Es a través de la presentación de varios problemas que impliquen un verdadero trabajo, que los niños van construyendo los nuevos conocimientos. Además, será necesario volver con los alumnos sobre las diferentes soluciones más de una vez para analizarlas, para compararlas con otras dadas a otros problemas, para comparar los problemas y analizar las semejanzas y diferencias que poseen para poder clasificarlos.

El ejemplo anterior muestra uno de los sentidos de lo que en algunos textos se menciona como el rol constructivo del error.

Cuando el docente prevé los posibles procedimientos que pueden usar los alumnos ante una situación que él les proponga, no sólo deberá imaginar los correctos sino también los erróneos. Esto le permitirá organizar la discusión (la puesta en común), decidir en cuáles de las soluciones dadas pondrá énfasis, determinar qué aspecto quiere que le quede claro a todos los chicos y prever qué es lo que quedará establecido como producto del trabajo llevado a cabo por los niños.

[26] Parra, C., *Las poderosas reflexiones de los chicos.* Buenos Aires, A-Z editora, 1997.

La institucionalización

Este momento de la tarea realizada por el docente, luego del trabajo que produjeron los niños, es el que permite subrayar la diversidad de soluciones que propusieron los alumnos, hacer notar que una manera es más eficaz que otra o que puede presentar los modos que la cultura ha elaborado para resolverlo (técnicas, algoritmos, lenguaje específico de la matemática) mostrando la eventual vinculación con los diversos procedimientos elaborados por los alumnos.

Al respecto explica Patricia Sadovsky: "Venimos hablando de la gestión del sentido del conocimiento matemático a partir de la interacción con distintos tipos de problemas. Ahora bien, todo problema implica una contextualización del concepto al que se apunta, y por lo tanto, pone en juego ciertos sentidos y deja afuera otros. Mientras los chicos resuelven estos problemas, pensados para que hagan funcionar ciertas herramientas, no pueden, en general, identificar un nuevo conocimiento en la resolución que han producido. Es necesario provocar un proceso mediante el cual el alumno pueda reconocer aquello que ha elaborado como producto de su actividad, pueda descontextualizarlo de los problemas que originalmente le dieron sentido para poder reutilizarlo en otras situaciones.

Este proceso –al que llamamos institucionalización– demanda del docente tener en cuenta la diversidad de procedimientos generados, pero a la vez le exige producir una convergencia hacia los saberes socialmente reconocidos. No se trata de yuxtaponer nombres y formulaciones a aquello que han producido los alumnos, se trata de establecer una verdadera articulación que haga posible el reconocimiento de un nuevo aprendizaje, que permita que los estudiantes retengan del problema aquello que es gestor del sentido y no solamente los aspectos superficiales del mismo. A la vez, la reutilización del concepto hará posible una reflexión más profunda, lo cual redundará en un uso mejor adaptado. Al plantear la relación en términos didácticos, se promueve una concepción de la enseñanza en la que se proponen sucesivas aproximaciones a un concepto, con niveles crecientes de organización."[27]

Para redondear las ideas que hemos desarrollado acerca de la importantísima tarea docente, transcribimos palabras de Delia Lerner.

> "La concepción de la enseñanza que sustentamos supone una profunda modificación del paradigma vigente desde hace siglos en la escuela:
> 'Paso a paso y acabadamente' debe ser sustituido por 'compleja y provisoriamente'. 'Complejamente' por dos razones: por una parte, porque el objeto de conocimiento es complejo y desmenuzarlo es falsificarlo; por otra parte, porque el proceso cognoscitivo no procede por adición, sino por reorganización del conocimiento. 'Provisoriamente' porque no es posible llegar de entrada al conocimiento correcto –objetivo de enseñar–; solo es posible realizar aproximaciones sucesivas que van permitiendo su reconstrucción".[28]

[27] Sadovsky, P., "Pensar la matemática en la escuela", en Poggi, M. (comp.), *Apuntes y aportes para la gestión curricular.* Buenos Aires, Kapelusz, 1995.

[28] Lerner, D., "La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición", en *Piaget-Vygotski: contribuciones para replantear el debate.* Buenos Aires, Paidós, 1996.

actividad 10

Realizaremos una especie de ejercicio de anticipación como el que realizan los docentes a la hora de planificar.
Hemos seleccionado problemas relacionados con el tema de conteo, algunos de los cuales han sido extraídos de las "Olimpíadas Ñandú"[29].
Al plantearlos a alumnos de 6° y 7º año, quienes se enfrentan por primera vez a tal tipo de situaciones, puede observarse la incapacidad que demuestran para realizar una búsqueda sistemática de los números que verifican las condiciones planteadas.
Por ejemplo, "María tiene que extraer dinero de su caja de ahorro y olvidó el número de identificación personal. Luego de mucho pensarlo, recordó que era de 4 cifras distintas, que empezaba con 8 y que todas las cifras eran pares. ¿Cuántas claves tendrá que probar, como máximo, para encontrar la correcta?"
Los alumnos utilizan distintos procedimientos para escribir los números que cumplen las condiciones del problema.

a. Piensen y escriban cuáles son las condiciones que deben cumplir los números.

b. Anticipen cuáles podrían ser las diferentes aproximaciones de los alumnos luego, comparen sus previsiones con las respuestas dadas por los alumnos al ponerlas en práctica.
La confrontación de los distintos procedimientos utilizados y la discusión entre los alumnos sobre la cantidad de números hallados permite construir entre todos una metodología de búsqueda exhaustiva de todos los números que verifiquen las condiciones del problema.
Es necesario poder reinvertir las adquisiciones de los alumnos y comprobar su eficacia en situaciones similares, llamando "situación similar" a aquella que solicita del alumno las mismas capacidades y no refiere necesariamente a los mismos temas. Se trata, en nuestro ejemplo, de presentar situaciones que exijan un análisis de los números que verifican ciertas condiciones y la búsqueda sistemática de números con ciertas condiciones.
Es posible plantear este *segundo problema*:
¿Cuántos números pares comprendidos entre 1000 y 2000, cuya suma de las 4 cifras sea menor que 6 se pueden escribir?

c. Piensen y escriban sus respuestas (tal como es de esperar que se plantee su trabajo el docente).

Finalmente, el *tercer problema* permite avanzar aún más, empezando a descubrir la estructura multiplicativa de los problemas de conteo:

¿Cuántos números capicúa de 5 cifras se pueden formar si se quiere que tengan 4 de sus dígitos iguales y el otro diferente?

Problemas del mismo tipo, pero *más complejos* que exigen el trabajo con criterios de divisibilidad pueden comprobarse en el siguiente ejemplo:

¿Entre 10 y 238, cuántos múltiplos comunes a 4 y a 6 hay? ■

En esta actividad puede verse una verdadera *secuencia de problemas*[30] que ha elaborado un docente. Nos podríamos preguntar, por ejemplo:

- ¿Cómo está organizada la secuencia?

[29] Saiz, I., ob. cit, 1994.
[30] Más adelante (p. 55) aparecen mayores precisiones acerca del significado de secuencia de problemas.

- ¿A qué apunta globalmente?
- ¿Cuáles son los contenidos necesarios para abordarla?
- ¿Cuáles son los contenidos que se trabajan?
- ¿Cuáles son los objetivos de la secuencia?
- ¿Hay articulación entre el conjunto de actividades de la secuencia y los objetivos?
- ¿Cuál es la organización posible de los diferentes momentos de gestión de las clases? (Organización del grupo, puesta en común, etc.)
- ¿Cuál es el conocimiento que se quiere construir con cada actividad de la secuencia?
- ¿Cuál es la diferencia de cada actividad con la actividad posterior? ¿Qué se supone que el alumno puede hacer ahora que antes no podía hacer?
- ¿Cómo se complejiza cada actividad para que el resultado sea una verdadera secuencia?
- ¿En cuántas clases puede desarrollarse la secuencia?
- ¿Cada actividad es una clase?
- ¿La secuencia se dará en clases seguidas o alternadas?
- ¿Qué es lo que se institucionalizará?
- ¿Hay reinversión de los conocimientos?
- ¿Cómo podríamos continuar la secuencia?

actividad 11

Para los Directivos:
Cómo podrían utilizar esta serie de preguntas para analizar clases, planificaciones, proyectos, secuencias didácticas, actividades de los alumnos en los cuadernos. ¿Agregarían otras? ¿Cuáles? Expliquen. ■

Este tipo de preguntas son las que podemos hacernos cuando analizamos la tarea de un docente en matemática, ya sea cuando observamos sus clases o sus planificaciones o las actividades de los alumnos en sus cuadernos. También pueden resultar útiles a la hora de analizar libros de texto del área.

Y volviendo a los alumnos:

Pregunta “d”: ¿Qué exige la resolución de problemas a los alumnos?

Es habitual escuchar de los maestros quejas referidas a las dificultades con que se encuentran los alumnos cuando se los enfrenta a la resolución de problemas. Las más comunes son: “no razonan”; “no comprenden el enunciado”; “no saben qué cuenta tienen que usar”.

En general, se cree que estas dificultades van a desaparecer cuando se incremente la práctica, o sea, cuando haya más problemas a resolver. Si bien es cierto que no se puede aprender algo con lo que no se tiene contacto, ¿será esto suficiente para que estas dificultades desaparezcan?

Analicemos la situación desde otro lugar. Para poder intervenir comencemos por preguntarnos, por ejemplo, ¿qué le exige la resolución de un problema a un alumno?

actividad 12

Resultaría un buen ejercicio que ustedes reflexionaran acerca de cuáles son las actividades que desarrollan cuando resuelven un problema matemático cualquiera. ■

Comparen sus afirmaciones con lo que nosotros pensamos que requiere de los alumnos la resolución de un problema:

- Interpretar la información que se brinda
- Seleccionar la información necesaria para responder a las preguntas y organizarla
- Tener una representación de la situación
- Movilizar las herramientas matemáticas necesarias
- Planificar una estrategia de resolución
- Registrar los procedimientos utilizados
- Anticipar resultados
- Rechazar procedimientos que parecen no conducir a la meta
- Analizar la razonabilidad de los resultados
- Discutir si el problema tiene una, varias o ninguna solución
- Reinsertar los resultados en el problema
- Validar el procedimiento utilizado
- Analizar la economía de la estrategia elegida

El complejo sistema de acciones que implica la resolución de problemas sólo puede ser puesto en marcha por nuestros alumnos si les ofrecemos situaciones que permitan la toma de contacto y la reflexión sobre estas características.

Habrá que plantear problemas variados, que permitan tomar contacto con la existencia de situaciones que:

- Se puedan resolver sin operar
- Se puedan resolver operando

- No se puedan resolver con la información que se tiene

- Tengan varias resoluciones posibles que se puedan efectuar de varias formas que tengan una, varias o ninguna solución.

A continuación presentamos diferentes situaciones a fin de ejemplificar lo que estamos planteando.

Actividades para entregar a los alumnos

María olvidó las tres últimas cifras de su documento que empezaba con
2 5 3 4 7 – – –

Ella recuerda que el número de su documento es múltiplo de 3 pero no de 6 y que la suma de las tres últimas cifras es menor que 12. ¿Cuántos son los posibles números del documento de María?

actividad 13

Intenten solucionar el problema antes de continuar con la lectura. ¿Qué conocimientos pusieron en juego para resolverlo? ■

Como ya hemos expuesto, la función que desempeñará el problema dependerá del grupo de alumnos y de sus saberes, como del lugar que ocupe dentro de una secuencia de problemas y de los diferentes estilos de conducción de los docentes que lo lleven a la práctica. Por esto podemos afirmar que este mismo problema puede funcionar como herramienta de construcción de saberes matemáticos o bien como herramienta de construcción de estrategias para la resolución.

Cuando hablamos de estrategias nos referimos a que seguramente los alumnos utilizarán diferentes procedimientos para resolverlo. Algunos probarán poniendo números y dividiendo el número de documento por 3 para comprobar que 3 es divisor de ese número, pero no tendrán en cuenta que no debe ser múltiplo de 6. Otros, escribirán la mayor cantidad de números que cumplan con dos de las condiciones, pero a lo mejor no tendrán en cuenta que la suma es menor de 12.

En cambio, si el maestro lo planteara con el objetivo de introducir a sus alumnos en la noción de múltiplos y divisores, o para propiciar la reinversión en un contexto diferente, sería una herramienta de construcción de saberes.

Vamos a otro problema.

Actividades para entregar a los alumnos

Una persona tiene 2.500 estampillas de colección y se propuso distribuirlas en 600 hojas, colocando en cada una de las hojas la misma cantidad y utilizando todas las hojas. El hombre es medio raro y, por razones que se ignoran, cree que le será conveniente que en cada hoja haya una cantidad impar de estampillas. Hace horas que las está acomodando y no lo logra. ¿Lo pueden ayudar?

actividad 14

Antes de continuar con la lectura resuelvan el problema y analicen los conocimientos puestos en juego para solucionarlo. ■

Este problema no tiene solución. Sin embargo, es absolutamente válido considerarlo un problema matemático ya que para demostrar que no se puede resolver hay que apelar al conocimiento matemático. Al igual que el problema anterior, permite el despliegue de diferentes estrategias y también es un vehículo adecuado para analizar las relaciones entre números pares e impares.

Con el mismo criterio de posibilitar a los alumnos un trabajo centrado en la resolución de problemas habrá que ofrecerles situaciones como la siguiente[31]:

Actividades para entregar a los alumnos

Enunciado:
Un tren con 4 vagones llega a la estación. En cada vagón pueden viajar 50 pasajeros. En el primer vagón hay 23 pasajeros instalados, 18 en el segundo, 42 en el tercero y el último todavía está vacío. En el andén hay 86 pasajeros esperando para subir.

Consigna:

1. En pequeños grupos tienen que *pensar y escribir todas las preguntas* que puedan sobre esta situación. En una hoja aparte escriban todos los cálculos que permitan contestar esas preguntas. No valen las preguntas cuyas respuestas ya figuran en el texto, por ejemplo: ¿cuántos pasajeros hay en el primer vagón?; ni tampoco las preguntas cuya respuesta es algún dato del texto, ni las que no se pueden contestar con los datos del texto, como por ejemplo: ¿cómo se llama la estación?

2. Cuando tu grupo haya terminado le va a entregar al grupo con el que interactúa la hoja con los cálculos para que ellos puedan averiguar las preguntas que ustedes se hicieron. Luego van a comparar las preguntas para ver si son las mismas o no y, en ese caso, discutir que fue lo que pasó.

actividad 15

Resuelvan las situaciones y, luego, analícenlas. ■

Análisis de la situación

En esta propuesta se apunta particularmente a:

- incluir la actividad de formulación de preguntas como inherente al quehacer matemático,
- establecer el significado de los números en el contexto del problema,
- juzgar el valor de la información que se obtiene,
- analizar la pertinencia de las relaciones entre preguntas y cálculos.

[31] Parra, C., *Los niños, los maestros y los números.* Buenos Aires, MCBA, 1993.

Al tener que plantear cálculos y formular la pregunta correspondiente, los alumnos se ven forzados a tener que analizar el significado de los números en el contexto del problema. Comúnmente, los números están conectados con cálculos pero no con la representación del problema. Esto suele estar ausente en los intercambios entre los alumnos pese a que constituye un aspecto central, porque es complejo, porque es fuente de errores y porque compromete directamente la comprensión de la situación, razones por las que los docentes no hacen este tipo de planteo.

La modalidad de actividad propuesta obliga a centrarse en la información y a analizarla. Si la consigna fuera que un grupo planteá cálculos y otro invente problemas sin el contexto de una situación (actividad respecto de la cual queremos hacer distinciones pero no devaluarla) para 23 + 18 los alumnos pueden responder con cualquier situación de suma, como por ejemplo: "tenía 23 figuritas y me regalaron 18. ¿Cuántas tengo ahora?" Son infinitas las situaciones que pueden corresponderle. En cambio, en el contexto de una situación hay que analizar el significado de los números y realizar los ajustes que sean necesarios para encontrar una pregunta cuya respuesta tenga sentido, como sucedería si el grupo que recibiese el cálculo preguntara ¿cuántos pasajeros viajan en el tren? para el cálculo 23 + 18. En realidad, la pregunta debe ser reajustada por la siguiente: ¿Cuántos pasajeros viajan en el primero o segundo vagones antes de que el tren llegue a la estación?".

El hecho de vincular los cálculos con las preguntas permite que los alumnos discutan si se obtiene nueva información o no a partir de las preguntas que formulan ellos mismos.

Al ponerse en práctica como tarea individual el enunciado de los vagones, con niños que habían realizado otras tareas semejantes a la propuesta grupal anterior pero en otros contextos, se obtuvieron las siguientes preguntas:

¿Cuántos pasajeros hay en total?
Si en... vagón hay... pasajeros, ¿cuántos más entran?
¿Quedarán pasajeros esperando en el andén?
Para que nadie quede sin subir, ¿cuántas personas entran en cada uno?
¿Cuántos pasajeros pueden entrar en el tren?
¿Cuántos se quedarán en la estación?
Si suben los 86, ¿cuántos pasajeros va a haber en el tren?
¿Cuántos asientos van a sobrar?
¿Cuál vagón está más lleno?
Si en el vagón que sobre suben 50 y las otras personas se reparten ¿cuántas van?
Los pasajeros del andén ¿entran?

Muchas de estas formulaciones podrían ser retrabajadas y llevarían a problemas interesantes y hasta se podrían pensar problemas de estimación. Son solo algunos ejemplos de las posibilidades de acción de los niños cuando se les plantean propuestas diferentes a las habituales (los problemas tipo) y que les posibilitan poner a prueba sus conocimientos. Estas propuestas también hacen aparecer diferentes procedimientos y, especialmente, los hacen desarrollar capacidades para resolver problemas, siempre que estén acompañados por un docente comprometido y convencido de un tipo de trabajo en el aula de matemática.

Por todo lo expresado hasta ahora cabe insistir en la necesidad de que la "resolución de problemas" organizados en secuencias de enseñanza sea el verdadero eje del trabajo matemático en las aulas y las escuelas bonaerenses. Sus diferentes aspectos deberían ser enseñados –explícita y articuladamente– con los ejes mencionados en nuestro Diseño Curricular (Números y operaciones, Nociones geométricas, Mediciones, Nociones de estadística y probabilidad, Tecnología, Formación ética).

Como se habrá podido inferir el tipo de trabajo que buscamos que se instale en las aulas de matemática lleva a una relación diferente de los alumnos con el conocimiento, con los docentes y con sus pares.

En diferentes momentos del trabajo en las clases de matemática, nos encontramos ante oportunidades propicias para que, junto con la apropiación de modos propios del quehacer matemático, se desarrollen también modos de funcionamiento propios de una comunidad democrática. El enfoque centrado en la resolución de problemas y actividades y reflexión sobre lo realizado favorece el trabajo con ciertos valores y actitudes que se quieran transmitir. Por ejemplo, cuando el docente presenta al alumno una situación a resolver, este pondrá en juego sus conocimientos previos y tratará de resolverla. Este trabajo promueve el desarrollo de la confianza en las propias posibilidades, también el compromiso de encontrar una solución y poder dar cuenta de su validez, la perseverancia y el esfuerzo personal ante el desafío que la situación plantea.

Otros ejemplos:

> En las instancias de elaboración conjunta –en parejas o pequeños grupos– es necesario alcanzar acuerdos compartidos donde *los criterios de establecimiento de la verdad se jueguen en función del conocimiento, sin posiciones diferenciadas.* También debería evidenciarse este clima cuando se realizan intercambios colectivos, en los momentos de confrontaciones de estrategias utilizadas, justificaciones, argumentaciones. *Un clima en el cual se respete y valore lo realizado y afirmado por todos, se destaquen los avances, se muestren los errores como constitutivos de los procesos de búsqueda* en los que se espera que puedan involucrarse los alumnos. Esto abre a toda la clase la posibilidad de un análisis sumamente fructífero, que permite establecer nuevas relaciones. Todos estos son ejemplos vinculados a un aprendizaje (por medio) de la resolución de problemas.

Cerramos esta sección con palabras de Patricia Sadovsky que compartimos y sintetizan nuestro parecer.

> "Enseñar matemática es, desde nuestro punto de vista, transmitir tanto un conjunto de conceptos como un cierto modo de pensar y producir."

Cuarta parte

La organización de los contenidos

Continuando con el método de los interrogantes, para la selección de los contenidos nos planteamos lo siguiente:

¿Qué enseñar?	¿Qué nos proponemos para que los alumnos trabajen/construyan? ¿Qué contenidos seleccionaremos de acuerdo con las características de los alumnos? ¿A qué ejes de contenidos responden? ¿Satisfacen los diferentes intereses de los alumnos? ¿Se adecuan a su nivel evolutivo? ¿Qué contenidos priorizamos y seleccionamos en cada área o campos de conocimiento?
¿Cuándo enseñar?	¿Qué contenidos enseñaremos por ciclo y por año de la EGB? ¿Cómo se organizarán, en cada año, considerando los saberes previos? ¿Cómo se hará la distribución del tiempo? ¿Cómo se elaborarán las unidades didácticas y/o los proyectos (del curso o compartidos con otros cursos)? ¿Se interrelacionan los contenidos de las distintas áreas?

actividad 16

Para los directivos:
Cuando comienza el año escolar, seguramente se reúnen con sus docentes a planificar. ¿Plantean interrogantes semejantes a estos? ¿Con qué objeto? ¿Agregarían otros? ¿Cuáles? ■

Tener en claro qué se quiere hacer y hacia dónde se quiere ir permitirá buscar, seleccionar y organizar los medios, las estrategias y dinámicas que faciliten la construcción de los aprendizajes.

La manera en que se plantean estos interrogantes resultará de utilidad para cualquier área curricular que se aborde.

La organización en el área de Matemática

En este punto nos dedicaremos a la compleja cuestión de la organización de los contenidos en la EGB.

Es necesario que nos planteemos algunas preguntas prioritarias vinculadas con esta organización, en el marco de una transformación en el tratamiento del área en las escuelas bonaerenses.

Algunos textos, que posiblemente ya hayan leído, acerca del enfoque de la enseñanza del área por medio de la resolución de problemas y actividades y la reflexión acerca de lo realizado, son: Malet, O. (coordinador en el área de matemática del Programa de Evaluación de la Calidad), Parra, C. y de Chemello, G. De este último texto les adjuntamos en el Anexo III una guía para focalizar su lectura. [32]

Pueden agregar a los textos leídos: *Los problemas de la enseñanza*[33] elaborados por la Dirección de Currículum y Capacitación de la provincia de Buenos Aires, el Marco General, los Tomos I y II del Diseño Curricular, para responder a los siguientes interrogantes:

actividad 17

¿Cuáles son los aspectos fundamentales del enfoque al que adhiere la Provincia de Buenos Aires en relación con la enseñanza de la matemática? Enúncienlos. ■

actividad 18

Desde una perspectiva histórica, ¿cuál es la razón para proponer a los alumnos la resolución de problemas como un modo de trabajo privilegiado en la actividad en el área? ■

actividad 19

¿De qué concepto partimos para suponer que la enseñanza de la matemática está cargada de significado y de sentido? ¿En qué se diferencia de la enseñanza tradicional? ■

actividad 20

Se insiste mucho en que solo se hace matemática cuando se resuelven problemas. ¿Qué comentarios merece esta afirmación?
Opinen al respecto. ■

En las páginas anteriores desarrollamos la idea de cómo la apropiación de los diferentes aspectos involucrados en los conceptos matemáticos, que buscamos transmitir a nuestros alumnos, requiere de un proceso que lleva muchos años; por esto resulta necesario que los docentes dispongan de

[32] Chemello, G., "La enseñanza de la matemática a debate" Guía de lectura para páginas 49 a 97, en G. Iaies (comp.), *Las didácticas especiales.* Buenos Aires, Aique, 1995.
Parra, Cecilia, *Las poderosas reflexiones de los niños.* Guía de lectura en Anexo III
Malet, O., *Revisando mitos. Qué cambiar en el área de matemática.* Documento del Programa de Evaluación de la Calidad de la provincia de Buenos Aires, 2001.
[33] Anexo V y Anexo VI.

una representación global de los contenidos de la EGB y del posible abordaje progresivo de su complejidad. Para poder poner esto en práctica se requerirán *acuerdos institucionales*. Este es el tema que trataremos en este apartado.

El Diseño Curricular (Marco General, tomos I y II), junto con los demás documentos curriculares de la provincia de Buenos Aires y los documentos elaborados por la Dirección de Educación General Básica (cinco en el área de matemática hasta el 2002), sirven como herramienta para que las instituciones educativas puedan diseñar, desarrollar y evaluar sus propios proyectos a partir de la planificación institucional. Se espera que la contextualización de los contenidos sea un proceso compartido, colectivo, propio de cada escuela, en el que se pongan en común las intenciones, las necesidades, se acuerden los criterios, se eviten contradicciones en los enfoques de la enseñanza en las diferentes áreas, se evalúen los logros y las dificultades, se permita la flexibilidad necesaria para realizar modificaciones, se tengan en cuenta las particularidades de la institución, de los alumnos, de la comunidad, etcétera.

Se acepta que no es posible una escuela en la que se trabaje de forma totalmente homogénea pero también se asume que, en diversas situaciones de la vida escolar, se observan acciones que pueden llegar a generar distorsiones en la calidad educativa. Por ejemplo: ¿en qué escuela no pasa que la maestra de 2° año prefiera un enfoque para la enseñanza de la matemática y la de 4° año otro?; o que un docente priorice terminar el programa aún a costa del sentido de los contenidos y otro prefiera "dar menos" pero "que se entiendan"; o que un maestro enseñe más contenidos de un área que de otra porque se siente más a gusto, domina mejor la disciplina, etcétera.

Lo que planteamos es la necesidad de que cada escuela elabore un proyecto común que otorgue coherencia a los tres ciclos de la EGB.

Esto es central en el área de matemática ya que la construcción de los conocimientos del área requiere de un proceso que lleva muchos años. Por ejemplo, la producción de un modelo único para resolver cualquier problema aditivo (el modelo algebraico correspondiente) implica 9 años de trabajo escolar, ya que sólo se alcanzará en los años de la Educación Polimodal. En este sentido, es importantísmo que todos los docentes posean una representación global de todos los contenidos de la EGB.

Como los alumnos no acceden de una vez y para siempre a todas las significaciones de un concepto, sino que mas bien desarrollan un proceso de sucesivas aproximaciones, organizaciones y reorganizaciones, tal como lo hemos señalado, surge la necesidad de seleccionar para cada uno de los años de la escuela qué significaciones se enseñarán, en qué año de la EGB, de qué manera y por cuál empezar.

Es imprescindible que estas selecciones estén acordadas por los docentes de los diferentes años, asumiendo cada uno que deberá explicitar no sólo las razones por las cuales abordará tales significados sino también los que dejará de lado, coordinando con sus colegas la progresión en la enseñanza de ese contenido.

Además, es necesario tener en cuenta que la apropiación de un contenido, o el aprendizaje de un concepto implica considerarlo como formando parte de una red de conceptos vinculados unos con otros y que todos se adquieren simultáneamente. "Los conceptos de número, operaciones, magnitudes, número racional y medida son, por ejemplo, instrumentos para la resolución de problemas de proporcionalidad directa, pero, al mismo tiempo, parte relevante del significado de los mismos es obtenido por los chicos a través de la resolución de las situaciones de proporcionalidad."[34]

[34] Parra, C., Sadovsky, P. y Saiz, I. *La matemática y su enseñanza*. Buenos Aires, PTFD, MCyEN; 1994.

A este concepto Gerard Vergnaud lo denomina *campo conceptual*. Esta idea de espacio de problemas vinculados a un concepto ya la introdujimos al abordar *El análisis de los contextos* a propósito del concepto de división y fracción.

Omar Malet explica al respecto:

> "Se trata de que al enseñar un concepto, se ofrezca a los alumnos la oportunidad de utilizarlo en la mayor cantidad posible de problemas diferentes para cuya resolución sea un instrumento adecuado. Se trata, también, de que los alumnos comparen esos problemas y registren qué tienen en común, qué afinidades profundas los vinculan por detrás de apariencias distintas.
>
> La idea de espacio de problemas es útil para:
>
> - Evitar que el alumno desarrolle una visión fragmentaria y parcial del concepto en cuestión (por ejemplo, evitar que identifique la fracción solo como parte de un todo)
>
> - Contar con puertas de entrada y caminos alternativos para acercar a los alumnos al concepto. Si bien es deseable que cada alumno se vaya aproximando sucesivamente al concepto desde las múltiples perspectivas posibles, también es deseable que los primeros acercamientos tengan lugar desde la perspectiva que le sea más cercana. Es evidente que el docente que conoce perspectivas diversas (por ejemplo, la fracción como razón, como probabilidad, etc.) está en mejores condiciones para acompañar a sus alumnos que aquel que sólo conoce una perspectiva única (la fracción como parte de un todo); en este último caso, si el alumno no logra comprender el concepto desde la perspectiva bajo la cual le es presentado, el docente no dispone de cursos de acción alternativos.
>
> - *Secuenciar el trabajo en el aula y el trabajo institucional con cada concepto* sobre bases científicas y racionales, evitando reiteraciones que restan tiempo y poco aportan (por ejemplo, muchas veces a lo largo de los nueve años de Educación General Básica se vuelve una y otra vez sobre el concepto de fracción como parte de un todo; las actividades que se proponen sólo difieren en el tamaño de los números fraccionarios –cuartos, quintos, séptimos, etc.; pero dichas actividades no profundizan en el concepto de fracción, ni implican una complejización enriquecedora. Distinguir los diversos tipos de problemas donde intervienen distintos significados de la fracción, a los que hicimos mención permite, en cambio, articular itinerarios más sustanciosos."

actividad 21

Fundamenten la importancia de un trabajo articulado entre los docentes de una institución educativa para la enseñanza de la matemática. ■

En contraposición con las ideas que venimos desarrollando, la enseñanza tradicional de la matemática descompone el saber en pequeñas partes aisladas y organiza su presentación a los alumnos en períodos breves y bien delimitados. Esta manera de organizar la enseñanza no le da importancia a las situaciones en tanto contextos específicos en los que los conocimientos son adquiridos y que dan relevancia a las significaciones del concepto en cuestión y su funcionalidad, o sea, a la posibilidad de que los alumnos distingan las situaciones que se resuelven con estos conocimientos de las que no. Es decir, se presentan los conceptos en un solo marco (numérico o geométrico o algebraico) y las aplicaciones sólo se trabajan en él, reduciendo las posibilidades de articulación de los mismos.

Otras cuestiones que podemos considerar:

Cuando los alumnos inician la Educación General Básica ya poseen un bagaje considerable de experiencias intuitivas directamente relacionadas con los principales contenidos del área de matemática. Pero, estas experiencias intuitivas, ¿deben considerarse conocimientos? Si se las considera de este modo, ¿cómo se da la progresión desde estos conocimientos matemáticos intuitivos, incompletos y a menudo erróneos hacia los conocimientos canónicos, convencionales? Y aún más, esta progresión, ¿es homogénea en todos los ámbitos del contenido como numeración, operaciones, medida, geometría, etcétera?

La naturaleza del proceso de construcción de un conocimiento matemático obliga a volver periódicamente sobre los mismos contenidos con niveles de complejidad, abstracción y formalización crecientes. Sobre este enunciado nos preguntamos, ¿qué significa que un conocimiento matemático tenga niveles de complejidad, abstracción y formalización crecientes? ¿Existe una continuidad que va ya desde lo estrictamente manipulativo, práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal? ¿Cómo es? ¿Qué significa que un contenido matemático tenga una cierta continuidad a través de los diferentes años y que esta continuidad se desarrolle en función de una complejización? La complejidad, ¿está ligada o no al uso del material concreto? ¿Tiene que ver con las funciones que desempeña esa noción? ¿Los contenidos matemáticos cambian de significado? ¿A qué remite un cambio de significado, al cambio de la acción o al cambio del contexto?

Vamos a centrar nuestro próximo análisis en dos puntos que tendremos en cuenta a la hora de seleccionar y organizar los contenidos en el área de matemática: los saberes que poseen los alumnos y la complejización de los contenidos

a. Los saberes que poseen los alumnos

¿Cómo incluir los conocimientos adquiridos formal o informalmente por los alumnos en las clases de matemática? Es indispensable que los docentes posean una representación de lo que los alumnos saben. En algunos casos hay investigaciones que se pueden tener en cuenta, pero siempre los docentes deben indagar esos saberes, por ejemplo, a través de preguntas elaboradas especialmente, o a través de la observación sistemática, cuando los alumnos resuelven las situaciones que se les presentan.

Es posible elaborar diagnósticos cada vez que se comienzan temas nuevos, pero es indispensable que los docentes realicen una observación de la evolución de los alumnos a través de las situaciones que les presentan. De otro modo no podremos asegurarnos que lo que planteamos representa un obstáculo para ellos. Ya dijimos que un problema es problema según los conocimientos que los alumnos posean. O sea, lo que para algunos es un problema, para otros ya no lo es.

Por otro lado, el docente debe ser capaz de plantear situaciones que permitan el despliegue de los saberes previos adquiridos en la escuela o fuera de ella, pero a la vez, que se muestren insuficientes como para generar así la necesidad de encontrar otros procedimientos pertinentes. Aparece aquí un doble desafío para el maestro: debe favorecer la construcción de los saberes por parte de los alumnos y además, debe ocuparse de que estos avancen en el camino hacia el saber elaborado.

Partir de lo que los niños saben no significa, solamente, tener una actitud de escuchar y valorar lo que expresan los alumnos; requiere también de un conocimiento específico por parte de los docentes acerca de lo que se ha investigado y elaborado en cada disciplina sobre las concepciones de los alumnos, la influencia del contexto social y los modos de establecer los nexos con el saber elaborado.

El esfuerzo por conocer las concepciones, los procedimientos, las aproximaciones de los niños a un tema, los conceptos, etc. no está (ni debe estar) disociado del esfuerzo por construir una secuencia de enseñanza tendiente a garantizar que, a partir de esto, avancen en dirección al dominio de ese contenido.

Conocer qué saben los niños es necesario pero no suficiente para resolver el problema de la enseñanza. También es muy importante conocer cuáles son los errores más comunes que cometen los alumnos al abordar cada uno de los temas, los que incluso han sido investigados y clasificados. Algunos se deben al modo de organizar la enseñanza; otros, a generalizaciones que realizan los niños acerca de las propiedades de algunos objetos matemáticos referidas a casos en los que dejan de cumplirse estas propiedades. Otros tienen que ver con las dificultades históricas que ha tenido el desarrollo del concepto por parte de la humanidad. Todos, sin embargo, son importantes cuando se tienen que organizar las secuencias de enseñanza y son propios de cada campo conceptual matemático.

En relación con la progresión de los conocimientos matemáticos intuitivos, incompletos y a menudo erróneos, hacia los conocimientos canónicos, convencionales no puede darse una respuesta general para cualquiera de los contenidos que se quiera que los alumnos adquieran. Esta progresión tiene que ver con la especificidad de los contenidos y de los procesos de apropiación, por lo que habrá que investigarla y analizarla en cada uno de los campos conceptuales y en los contextos escolares.

Un interesante ejemplo (y que puede ser muy útil cuando se tienen que organizar las secuencias de enseñanza tanto institucionales como a nivel del aula) lo representan los análisis de los resultados de las pruebas tomadas a alumnos de 7º y 9º años elaborados por el equipo de matemática del Programa de Evaluación de la Calidad de la provincia de Buenos Aires.

actividad 22

En el Anexo VII presentamos el análisis de dos ítem, uno relacionado con fracciones y el otro con decimales. Luego de leerlo, en grupo, elijan uno de los temas y organicen una secuencia de enseñanza que pueda contribuir a la superación de los errores cometidos por los alumnos. Pueden utilizar toda la bibliografía que consideren necesaria. ■

b. La complejización de las actividades

La complejización está directamente vinculada con cada campo conceptual y con el tipo de problemas que se planteen para resolver en torno a un mismo contenido. Tomaremos como ejemplo los diferentes sentidos que adquieren la suma y el producto a los que llamaremos problemas del campo aditivo y problemas del campo multiplicativo, respectivamente.

Los sentidos de la suma

En relación con el significado de la suma es conveniente preguntarse acerca de cuáles son las acciones concretas, realizables con objetos también concretos, que correspondan a esta operación.

Si se toma como ejemplo el siguiente problema:

> En el partido de Patagones, en el año 2000, la cantidad de bolsas de cebolla que obtuvieron fue de 2.149.320. Si este valor disminuyó las $\frac{3}{5}$ partes, en tres años, ¿cuántas bolsas salieron del distrito en el 2003?

Esta situación puede esquematizarse así:

Estado Inicial = 2.149.320 *Transformación* = $\frac{3}{5}$ de 2.149.320 *Estado Final = ?*

Es decir, hay un estado inicial (2.149.320) sobre el que opera la transformación ($\frac{3}{5}$. 2.149.320) y que va a dar por resultado el estado final.

En este caso, la función que desempeña la *transformación* es la de *restar un conjunto de elementos al conjunto inicial.*

Si se analiza lo que sucede en este otro problema:

> En el mes de septiembre la salida de cebolla del distrito subió de 31.930 bolsas a 282.534 ¿Cuál fue el aumento?

Al esquematizar la situación se obtiene:

EI	T	EF
31.930	?	*282.534*

Aquí hay dos estados, el inicial y el final. Lo que se debe buscar es la transformación.

Así como en el primer problema se trataba de *restar* un conjunto de elementos al estado inicial (EI), en este caso se trata de buscar *el operador de la transformación.*

Entonces: Existe una categoría de relaciones numéricas que da lugar a tres clases de problemas, que a su vez se dividen en dos, según si la transformación es positiva o negativa.

Conocido el EI y la T, hay que encontrar el EF

Conocido el EI y el EF, hay que encontrar la T

Conocidos el EF y la T, hay que encontrar el EI.

EI T EF

Un ejemplo:

> La pileta de Fortín Club puede contener 3.000 m^3 de agua. Por una rotura perdió 25.650 litros. ¿Cuánta agua le quedó?

Aquí hay un EI, una T y un EF.

Esquema:

EI	T	EF
3.000.000 l	-25.650 l	?

3.000 y el resultado del estado final son números naturales; -25.650 es un número relativo.[35]

[35] Vergnaud y Durand utilizan el nombre de números relativos a los que nosotros llamamos números enteros. Los obtienen como resultados de transformaciones.

actividad 23

Elaboren ejemplos de estas tres clases de problemas para sus alumnos. ■

¿Todos los problemas de suma son iguales?

Si bien el esquema con el que trabajamos es muy general (EI, T, EF), no abarca todas las posibles estructuras de problemas aditivos. Vergnaud y Durand, se han ocupado de investigar lo que ellos llaman *categorías de relaciones numéricas aditivas.*

Ejemplos:

> En un laboratorio se está elaborando un compuesto adelgazante. Las indicaciones escritas en un papel por el químico dicen: Este compuesto ya tiene 0,0999 gramos de la sustancia A y 0,0105 de la sustancia B. ¿Hasta el momento, cuántos gramos entre las dos sustancias hay?

En este problema no existe ningún desarrollo temporal. La operación de composición implica solamente dos estados, por lo tanto, no hay transformación, solo dos estados que componen un tercero.

Esquema:

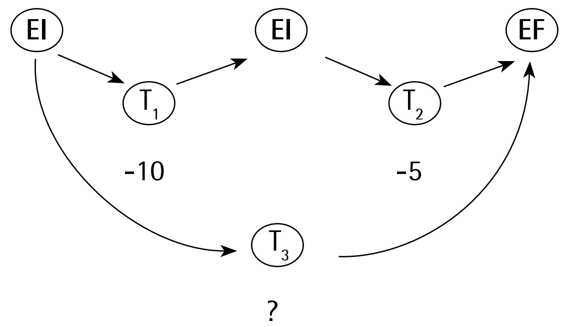
EI	EI	EF
0,0999	0,0105	?

Los números que intervienen son racionales.

> Juan fue a la farmacia a comprar medicamentos. El farmacéutico le hizo un descuento del 10% y luego otro del 5% ¿cuál fue el total descontado?

La estructura de este problema es: dos transformaciones que se componen en una tercera. No se sabe nada acerca de cuánto costaba el medicamento y por lo tanto tampoco sabemos el estado final.

Esquema:



Estos son números relativos: $T_1 = 0,10 . E_1$; $E_2 = E_1 - T_1$; $T_2 = 0,05 . E_2$; $EF = E_2 - T_2$

> Debo las 3/5 partes de $1000 a mi amigo. Le devolví la mitad. ¿Cuánto dinero le debo?

Esta es una transformación que opera sobre un estado relativo, y da como resultado un estado relativo.

Esquema:

$EI = \frac{3}{5} . 1.000$ $T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} . 1.000\right)$ $EF = ?$

Los números que intervienen son relativos

> Debo $\frac{3}{5}$ de \$1000 a María, y ella me debe $\frac{1}{4}$ de \$1000 ¿Cuánto le debo?

Este problema determina dos estados relativos que se componen en un tercero.

Esquema:

$E1 = \frac{3}{5} . 1.000$ $E2 = \frac{1}{4} . 1.000$ $EF=?$

Los números son relativos.

En esta aproximación a las diversas estructuras de los problemas aditivos se expresan los diferentes niveles de complejidad que implican. Si bien las operaciones son siempre sumas o restas presentan diferentes dificultades.

No todos estos problemas tienen el mismo nivel de complejidad. El nivel de dificultad dependerá del lugar que ocupe la incógnita dentro de la estructura del problema y los obstáculos con que se encuentren los alumnos al resolverlos.

La incógnita en el EF supone menor dificultad ya que permite ser pensada en acciones sucesivas y no simultáneas.

En cambio, resolver problemas cuyas incógnitas estén ubicadas en el EI o en la T, generan en los alumnos el obstáculo de representar mentalmente, de manera simultánea, las cantidades que implica la operación.

Por otro lado, las categorías de relaciones numéricas aditivas tienen diferentes grados de complejidad, en función de la dimensión de los números en juego, de su valor relativo, según se trate de números enteros o decimales o fraccionarios, según la estructuración sintáctica del enunciado, etcétera.

> A partir de este análisis se puede reflexionar acerca de la progresión de su enseñanza, teniendo en cuenta, entre otras cosas, los aspectos que hacen a las características de la misma noción.

actividad 24

Tomen un libro de segundo, tercero o cuarto año de una misma editorial y autor/es y analicen los esquemas a los que responden las actividades planteadas acerca de las operaciones aditivas. ■

actividad 25

Inventen cinco problemas que se resuelvan mediante multiplicación para cada uno de los integrantes del grupo. Escríbanlos y guárdenlos hasta la próxima actividad. ■

Los sentidos de la multiplicación

Para pensar en la multiplicación resulta más o menos trascendente plantearse los diferentes tipos de problemas que esta operación soluciona y los recursos adaptados para resolverlos.
La mayoría de los problemas que los docentes abordan cuando enseñan la multiplicación son de proporcionalidad.

> Si 3 blocks de hojas cuestan $5, ¿cuánto costarán 17 blocks?

Este tipo de problemas es el que los alumnos resuelven apelando a la multiplicación y, en general, cuando ya "saben" multiplicar.

> Si por 456 unidades de un producto se pagaron $3457, ¿cuánto costarán 1234 unidades del mismo?

Este sería, también, un problema de proporcionalidad, con números más grandes, pero no varía el significado de la operación. Se puede resolver utilizando la clásica regla de tres.

Si realmente se pretende que los alumnos profundicen este concepto, se deberá encontrar otro "tipo" de problemas en los cuales la multiplicación aparezca como la herramienta ideal para su solución.

Dentro de la clase de problemas de proporcionalidad, no todos tienen el mismo nivel de complejidad; hay una amplia gama de variables a tener en cuenta que harán variar el uso de la multiplicación ya que, por ejemplo, las *magnitudes transforman los problemas.*

Los problemas pueden referirse a magnitudes continuas o discretas. Operar con magnitudes discretas permite una representación más inmediata de la situación. A todos nos resulta evidente que a los alumnos les es mucho más complejo resolver un problema con 27 metros cúbicos que con 27 botellas.

Por otra parte, el trabajo con magnitudes continuas puede implicar diferentes niveles de dificultad. Los problemas con longitudes, por ejemplo, hacen jugar una relación que "falla" al trabajar con áreas. Efectivamente, al trabajar con longitudes, los alumnos aprendieron que si dos longitudes son iguales, son coincidentes al superponerlas. En el caso de las áreas, la forma de una figura interviene y puede ocurrir –es lo más probable– que dos áreas iguales no coincidan al encimar los gráficos de las superficies.

Cuando una magnitud se concibe como el producto o el cociente de otras (velocidad, volumen) aumenta considerablemente la complejidad de su tratamiento. Existen magnitudes de medición directa como la longitud, el peso, la capacidad, y otras que, si bien pueden medirse directamente, también pueden calcularse como el producto de otras dos magnitudes como el área, el volumen, la fuerza[36], etc. Otras magnitudes surgen del cociente de dos magnitudes (por ejemplo, velocidad, densidad).

Cuando se mide una superficie con otra elegida como unidad, o un volumen con otro volumen como unidad estamos ante situaciones de medición directa, pero cuando se miden las longitudes de los lados y se calcula el área, o cuando se miden superficies y longitudes para averiguar volúmenes, no se está realizando una medición directa sino un cálculo de las medidas a través del producto de medidas correspondiente a otras magnitudes.

Las variables relativas a tipos de números y tipos de magnitudes se combinan en cualquier problema. Las combinaciones intencionales del tipo de números y de magnitudes involucradas permitirán a los docentes *secuenciar los problemas* que se les plantean a los alumnos. No se trata de "facilitar" los problemas operando solamente con números pequeños, enteros y con magnitudes discretas, sino de controlar en las situaciones de enseñanza la graduación de las dificultades.

El análisis por parte de los docentes de dichas variables permitirá comprender el origen de algunas dificultades con las que se encuentran a veces los alumnos para resolver un problema. En muchos casos los problemas nos parecen similares en su nivel de dificultad y, sin embargo, no lo son.

Consideremos algunos *problemas de proporcionalidad* que se resuelven solamente con una cuenta de multiplicar. Si utilizamos como criterio de análisis qué operación resuelve cada problema, los que siguen a continuación podrían aparecer todos como de un mismo nivel de complejidad. Sin embargo, si realizamos el análisis de los problemas a partir del tipo de números y de magnitudes involucradas, la complejidad se diversificaría dando lugar a una amplia gama de problemas multiplicativos de dificultad variable. Veamos los problemas:

a. Cada caja de clavos posee 2440 unidades. Calcular cuántos clavos habrá en un camión que transporta 346 cajas. (Este problema es con números naturales más grandes y con ambas magnitudes discretas).

b. Un metro de soga cuesta $2,05. ¿Cuánto cuestan 5,75 m? (Este problema es con ambos números decimales mayores que 1 y las magnitudes son una discreta y la otra continua).

c. Cada pastilla pesa $1{,}2.10^{-2}$ mg. ¿Cuánto pesa un paquete de 12 pastillas? (En este caso un número es decimal menor que 1 y expresado en notación científica y el otro es un número natural pequeño. Las magnitudes son una discreta y otra continua).

d. Dos metros de tela cuestan $5,75. ¿Cuánto costarán 0,40 m? (En este problema ambos números son decimales, pero el valor correspondiente al precio de los dos metros de tela es mayor que 1 y el de la cantidad de tela menor que 1. El precio es una magnitud discreta y la medida de la tela es una magnitud continua).

e. En un rectángulo, el lado que mide 5 cm pasó a medir 7 cm. El otro lado, que tiene una medida de 3 cm, ¿cuánto tendrá que medir para que las dimensiones del rectángulo construido sea proporcional al original? (En este problema intervienen números enteros, pero la razón de proporcionalidad es un número racional).

f. El perímetro de una figura hexagonal de 5,6 cm de lado es de 33,6 cm ¿podemos decir que si su lado se cuadruplica, su perímetro también? (En este caso intervienen magnitudes continuas).

[36] $F = m \cdot a$, donde m es la masa de un cuerpo y a es la aceleración

Estos ejemplos muestran la variedad de situaciones a las cuales se puede recurrir para desarrollar, en este caso, un aspecto de la multiplicación.

actividad 26

Analicen si los problemas que inventaron en la actividad 25 corresponden a los de proporcionalidad mencionados en el párrafo anterior. Caracterícenlos. ■

Se presentan otro "tipo de problemas", para los cuales la multiplicación es también un recurso adaptado: los problemas de *productos de medida*.

En este tipo de problemas se pone en juego un sentido de la multiplicación diferente al de la proporcionalidad: dos magnitudes se multiplican para obtener una tercera magnitud.

> Si un rectángulo R tiene área A ¿cuál será el valor del área del rectángulo que resulta de duplicar los lados del rectángulo R?

Este tipo de problemas se resuelven mediante la multiplicación, pero evidencian una complejidad mayor que los problemas de proporcionalidad y amplían el sentido de la operación que se pone en juego.

Un tercer tipo de problemas vinculados al producto son los de combinatoria. La combinatoria aborda el problema de contar la cantidad de elementos de una colección finita organizada de cierta manera y pone en juego un nuevo sentido de la multiplicación.

> a. En una casa de comidas se venden sándwiches de fiambre y queso con un condimento. Para elegir tienen: 3 tipos de pan (francés, pebete o salvado); 3 fiambres (jamón, salame o mortadela); 2 variedades de queso (de máquina y/o untable); 4 condimentos (mostaza, mayonesa, ketchup o salsa golf) ¿Cuántos sándwiches distintos se pueden armar?
>
> b. El abuelo, el papá, la mamá y el hijo quieren sacarse una foto, sentados uno al lado del otro. ¿Cuántas fotos diferentes deben sacarse si quieren aparecer en todas las ubicaciones posibles, y cuántas si la familia fuese de 5 integrantes?

Un punto importante es resaltar el papel de las representaciones (diagramas de árbol, cuadros de doble entrada, etc.) en este tipo de problemas, para captar así la estructura multiplicativa.

Con estos ejemplos hemos querido mostrar el avance en la complejidad del concepto de multiplicación, complejidad que deberá ser tenida en cuenta a la hora de pensar en una distribución de contenidos a lo largo de la EGB y en cada uno de los años.

actividad 27

Con los problemas analizados en la actividad 26, organicen una secuencia y justifíquenla.
Pónganla en práctica y evalúen si la secuenciación es adecuada. En el caso de tener que modificarla, realicen los cambios necesarios y expliquen por qué. ■

La secuenciación en matemática

La construcción de los conocimientos matemáticos atraviesa un largo camino, que implica la resolución de *múltiples problemas, en variados contextos.* Así como *un "hacer" y un "reflexionar sobre el hacer"* con el fin de descontextualizar[37] el conocimiento que permitió resolver el hacer y pensar cómo se lo logró, para luego poder reinvertir este conocimiento descontextualizado, en un nuevo contexto, que implique una constante ida y vuelta entre situaciones que contextualizan saberes para luego descontextualizarlos.

Intentaremos abordar los problemas que plantea la toma de decisiones didácticas respecto de la secuenciación tanto sincrónica como diacrónica en los niveles institucionales y áulicos de los desarrollos curriculares.

El concepto de secuenciación diacrónica muchas veces se confunde con el de distribución de los contenidos en cada ciclo y/o año. Sin embargo la distribución puede hacerse sin ningún criterio ni justificación. *Secuenciar, en cambio, implica definir unos criterios explícitos y fundamentados, que orienten la forma de presentar y progresar en el tratamiento de los contenidos educativos. Una secuencia es una serie, formada por diferentes elementos que presentan relaciones mutuas.*

Para efectuar el *análisis institucional de las secuencias* son necesarias tanto una lectura sincrónica, representadas por las unidades didácticas, proyectos, etc., como una lectura diacrónica, que es la que da la clave para la secuenciación de los contenidos.

Las secuencias de enseñanza implican un proceso de complejización que lleva a que los equipos docentes de cada institución establezcan *acuerdos* que aseguren una creciente apropiación de los contenidos por parte de los niños. La elaboración de progresiones permite que los alumnos avancen en sus adquisiciones por lo que, para dar continuidad y coherencia al itinerario que siguen en los diferentes años de la EGB, será necesario que los acuerdos *partan de reflexiones acerca del aprendizaje y de las prácticas de enseñanza y desemboquen en la elaboración de progresiones de situaciones de enseñanza y el armado de secuencias de problemas y actividades que den a los alumnos la oportunidad de reutilizar, mejorar y dominar los conocimientos en juego.*

En el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje no es posible abordar a la vez todos los objetivos y contenidos presentes en un área determinada. Por el contrario es necesario que exista una distribución de los mismos a lo largo de diversas sesiones que se suceden en un curso escolar, un ciclo o bien una etapa completa. El equipo docente debe acordar esta organización para cada una de las áreas y para cada uno de los ciclos que se incluye en la planificación institucional, lo que va a permitir dar continuidad y coherencia al trabajo en el área.

Existen determinadas características de los conocimientos matemáticos que deberían considerarse, a saber:

- Que los conceptos matemáticos, en general, son largas construcciones que llevan no un año de escolaridad o varios, sino que siempre es posible saber algo más de cualquiera de esos objetos.

- Que los contenidos no se encuentran aislados dentro de la disciplina sino inmersos en una amplia red de relaciones con otros contenidos, y que esto debería impregnar la enseñanza. La enseñanza de los contenidos matemáticos debe dirigirse, no sólo a ellos, sino que las relaciones mencionadas deben ser objeto de enseñanza.

[37] Descontextualizar significa "sacar" el conocimiento recién construido del contexto en el que se construyó e identificarlo utilizando la forma matemática.

Es necesario tener en cuenta que la selección de contenidos tiene ciertas reglas. Estas deben hacerse explícitas (ideas, intereses, valores y mecanismos de decisión que la determinan) para evaluar y acordar la selección. Por ejemplo, en el caso de la división señalar por qué el énfasis está puesto en el algoritmo y no en la operación en sí, es un motivo para reflexionar.

Desde esta perspectiva pueden tomarse decisiones (la institución en su conjunto) para el año escolar, para el ciclo, para la escolaridad en su totalidad, respecto de los diversos problemas que se van a proponer para cada uno de los grandes campos de conceptos que son objeto de enseñanza. Para la toma de estas decisiones se deberá tener en cuenta, indefectiblemente, cuáles son los *conocimientos que disponen los alumnos* y que podrán utilizar como puntos de apoyo para comenzar a trabajar con un nuevo objeto, o con un sentido diferente de un objeto con el cual ya han tenido algún tipo de experiencia tanto desde la educación formal o como de los adquiridos informalmente. Los conocimientos que son punto de apoyo para la elaboración de un nuevo concepto también forman parte del *sentido de ese concepto* y permiten ubicar el nuevo objeto.

¿Cómo hacemos para ordenar las situaciones de todo tipo que debemos suministrar al alumno? Lo secuenciable no es el contenido sino la construcción del conocimiento. Esta construcción no depende solo del contenido sino también, o además, del nivel de dificultad del aprendizaje que se asocia a ese contenido y que tiene relación con los diferentes aspectos que pueden trabajarse de un mismo contenido, (las propiedades, las relaciones que tiene con otros contenidos, etcétera).

¿Cómo se presentan los contenidos del área de Matemática en el diseño curricular?
Los conceptos matemáticos no se encuentran aislados dentro de la disciplina sino inmersos en una amplia red de relaciones con otros conceptos matemáticos. De allí la decisión jurisdiccional de establecer el tratamiento de la enseñanza de la matemática desde una estructura por áreas. Esto hace que deban considerarse como contenidos de enseñanza los correspondientes a los ejes, pero también las relaciones que se dan entre ellos.

Para la Educación General Básica, el diseño curricular organiza los contenidos en cuatro ejes específicos del área:

- Número y operaciones
- Nociones geométricas
- Mediciones
- Nociones de Estadística y Probabilidad.

Por decisión jurisdiccional, a estos ejes organizadores se integran otros que son transversales a toda la formación:

- el eje del campo tecnológico
- el eje de la formación ética.

La presentación de los contenidos en ciclos y su formulación se realiza en función de ejes de organización. Se establecieron de acuerdo con las siguientes consideraciones:

- es una alternativa para establecer nexos entre contenidos que tienen múltiples interrelaciones,
- la secuencia en que los contenidos aparecen es arbitraria,
- la enunciación no prescribe linealidad para su tratamiento.

Quinta parte

¿Qué situaciones proponer a nuestros alumnos?

Una misma propuesta para abordar distintos aspectos de un contenido en diferentes años

En las propuestas que presentamos a continuación, se parte de un juego en el que se trabaja con fósforos o palitos y se abordan distintos aspectos de un contenido geométrico a través de los distintos años de la EGB, en la que se. muestran la interrelación con contenidos de otros ejes.

Recursos:
fósforos
modelos de figuras
hojas

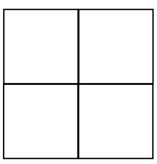
Primer Ciclo

Actividad 1

Se entrega a los alumnos fósforos (a cada uno la cantidad necesaria) y un modelo dibujado en papel calco (1º año) y otro en papel (2º y 3º) y se les pide que construyan sobre la figura (1º año) otra igual a la del modelo, usando los fósforos, sin encimarlos ni partirlos (las medidas del modelo deben coincidir con las de los fósforos) La indicación para 2º y 3º año es que deben reproducir el modelo sin apoyar los fósforos en la figura (no es necesario que las medidas del modelo coincidan con las de los fósforos, cada segmento representa un fósforo).

Luego se les pregunta: ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que armaron?

El modelo es el siguiente:



El docente propone la consigna, distribuye el material y se asegura, a través de una discusión con los alumnos, que la consigna tenga sentido para ellos. En la fase de investigación los alumnos trabajan individualmente. Es posible que en el transcurso de esta fase las dificultades que aparezcan sean objeto de discusión, por ejemplo cuando los alumnos retienen una parte de la consigna o agregan condiciones que no se habían indicado.

El docente recorrerá las distintas mesas para observar la actividad de los alumnos y consignará en el pizarrón los resultados obtenidos. Lo que se intenta con este trabajo es que puedan identificar que hay cuadrados de distintos tamaños y “escondidos”. Esto se logra mediante algunas actividades de construcción y reconstrucción.

A partir del modelo original o de la reproducción hecha se les puede plantear las siguientes consignas:

Actividad 2

a. Retirá 2 fósforos de modo que queden 3 cuadrados

b. Retirá 4 fósforos de modo que queden 2 cuadrados

c. Retirá 4 fósforos de modo que quede 1 cuadrado

d. Retirá 2 fósforos de modo que queden 2 cuadrados de distinto tamaño

e. Mové 3 fósforos para hacer 3 cuadrados de igual tamaño

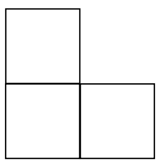
f. Mové 4 fósforos para hacer 3 cuadrados de igual tamaño

g. Mové dos fósforos para hacer 7 cuadrados de tamaños diversos (tendrás que cruzar algunos fósforos)

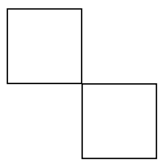
h. Mové 4 fósforos para hacer 10 cuadrados no todos del mismo tamaño (tendrás que cruzar fósforos)

Algunas de las posibles soluciones son:

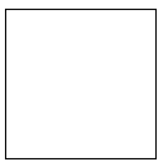
a.



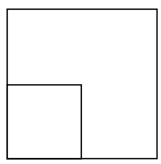
b.



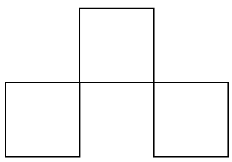
c.



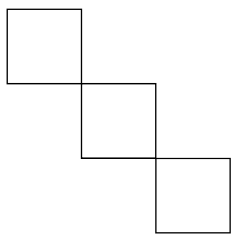
d.



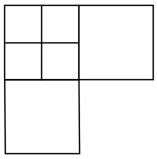
e.



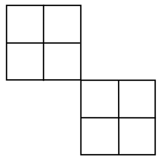
f.



g.



h.

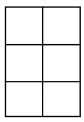


De acuerdo al grupo de alumnos con los que trabaja, puede agruparlos teniendo en cuenta sus saberes previos. Es conveniente registrar las construcciones hechas por los alumnos en el pizarrón o en un papel afiche (este es un recurso que permite volver a lo trabajado cada vez que el docente lo crea necesario ya que es como la memoria de lo hecho en la clase). También se les puede solicitar que registren en papel sus construcciones.

Actividad 3

Se entrega a cada alumno un nuevo modelo en papel de calco para 1º año y en papel para 2º y 3º año, y se les pide que averigüen cuántos cuadrados lo componen y se les da la posibilidad de usar o no los fósforos. El modelo, en este caso, ofrece más dificultad el anterior, ya que hay cuadrados "escondidos" más difíciles de ver. Si los alumnos no pueden identificar los cuadrados se pueden presentar cuadrados de distintos colores en cartulina u otro material que se correspondan con los escondidos del modelo, por superposición. Es posible, también, que identifiquen el rectángulo como figura cuadrada. Esto es una oportunidad para realizar comparaciones entre cuadrado y rectángulo sobre la base de sus propiedades: congruencia o no de lados y ángulos.

Modelo



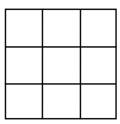
Consigna:
Armá con fósforos la figura. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que armaste?

Actividad 4

Se presenta un tercer modelo en papel, pero ahora no pueden utilizar los fósforos (2º y 3º) y para 1º, el modelo en papel de calco, y pueden o no utilizar los fósforos.

Como en la actividad anterior, si no descubren todos los cuadrados escondidos, se puede usar como estrategia los cuadrados de cartulina.

Modelo



Consigna:
Armá con fósforos la figura ¿cuántos cuadrados hay en la figura que armaste?
También pueden presentarse consignas de trabajo en las que se solicite, como anticipación a la construcción de cuadrados, un estudio de la factibilidad o no de la construcción, justificando lo realizado.

Actividad 5

Antes de realizar cada construcción, discutí con tus compañeros cómo debería realizarse:

a. Construir un cuadrado con 3 fósforos

b. Construir un cuadrado con 6 fósforos

c. Construir un cuadrado con 7 fósforos

d. Construir un cuadrado con 8 fósforos

e. Construir un cuadrado con 10 fósforos

f. Construir un cuadrado con 12 fósforos

g. ¿Cuál es la mínima cantidad de fósforos que se pueden utilizar para construir un cuadrado

Es conveniente que los alumnos registren en una hoja de papel las construcciones disponer de ellas en la puesta común. Como en las actividades anteriores, usted copiará las resoluciones en el pizarrón o en el afiche.

Actividad 6

Consigna:
Se construyeron figuras con fósforos. En cada caso ¿cuántos fósforos te parece que se utilizaron?

a. La figura tiene 2 cuadrados

b. La figura tiene 3 cuadrados

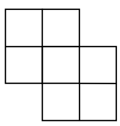
c. La figura tiene 4 cuadrados

Esta actividad consiste en darles el número total de cuadrados y preguntarles cuántos fósforos se necesitan para armarlos.

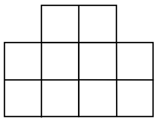
Actividad 7

Busquen en las siguientes figuras todos los cuadrados que se indican en cada caso. Expliquen cómo lo hicieron.

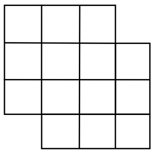
a. En esta figura podrás encontrar 9 cuadrados



b) En esta figura hay 14 cuadrados



c) Esta figura contiene 23 cuadrados



actividad 28

Es importante, también, que los alumnos descubran los cuadrados en distintas posiciones en las que los lados no tengan sus lados alineados respecto al borde del papel.
Construyan una actividad para los alumnos teniendo en cuenta estas indicaciones. Llámenla **Actividad 8.** ■

Actividad 9

Se puede retomar la actividad 5 con alumnos de 3º año y proponerles:

a. Completá la tabla con los datos faltantes de tal forma de construir un cuadrado en cada caso. (En este caso se puede recurrir al afiche realizado ese día).

Nº de fósforos por lado	1		3	4			7	8	9	
Nº de fósforos totales	4	8			20	24				40

Con esta actividad se apunta a que los niños utilicen procedimientos de multiplicación o de división para completar la tabla y encuentren el valor constante, “4 fósforos como mínimo para armar un cuadrado”

Todas las actividades que se realizaron anteriormente con cuadrados pueden organizarse para trabajar con triángulos equiláteros. La actividad quedaría del siguiente modo:

b. Completá la tabla con los datos faltantes de forma tal de construir un triángulo en cada caso.

Nº de fósforos por lado	1		3	4			7	8	9	
Nº de fósforos totales	3	6			15	18				30

c. Completá la serie para construir cuadrados con fósforos.

4 - 8 -12……………………… 40 ……………………………………………100

d. Completá la serie para construir triángulos con fósforos.

3 - 6 ……………………………. 30 ……………………………………….. 99

En los incisos c y d se trabajan patrones numéricos por recurrencia[38].

También se puede retomar la actividad 9 pero ahora trabajando con construcciones con regla sobre papel y que correspondan 1 fósforo = 1 cm.

De esta forma se construyen algunos de los cuadrados o los triángulos de la tabla.

Actividad 10

Dibujen los cuadrados de la tabla de la actividad 9.a, teniendo en cuenta la siguiente escala: 1 fósforo = 1 cm.

Se trabajarán estas actividades agrupando[39] a los alumnos teniendo en cuenta sus saberes previos.

En esta secuencia de clases se proponen actividades que apuntan a:

a. *La visualización:* Estas se basan en el uso de efectos visuales para resolver problemas o probar propiedades. El alumno debe leer e interpretar las representaciones visuales, en este caso los modelos de cuadrados para poder encontrar los cuadrados escondidos, o bien formar cuadrados con determinada cantidad de fósforos. Son actividades en las que interviene la percepción.

b. *El dibujo y la construcción:* Estas están directamente ligadas a las de la representación visual externa; en este caso incluyen la representación de figuras, la reproducción o copia de modelos y la construcción a partir de datos.

c. La comunicación: Las mismas ponen en juego las competencias de leer, escuchar y hablar, referidas a mensajes en los cuales interviene el lenguaje geométrico. Pueden consistir en:
- Interpretar información geométrica dada en diversas formas
- Seguir instrucciones escritas u orales para construir figuras
- Interpretar razonamientos geométricos expresados simbólicamente
- Transmitir información geométrica utilizando diversos códigos

[38] Un patrón es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc) que se construyen siguiendo una regla (algoritmos), ya sea por repetición o recurrencia.

[39] Se pueden consultar los módulos "Hacia una mejor calidad de la Educación Rural", que se encuentran en los CIE. En ellos se plantean los distintos criterios para agrupar alumnos en plurigrado pero que son útiles para idear otros agrupamientos.

- Redactar o dictar instrucciones para que un compañero construya una figura
- Describir un objeto geométrico o espacial, por escrito u oralmente
- Exponer un razonamiento geométrico
- Elaborar definiciones geométricas y enunciar propiedades
- Formular preguntas orientadas o aclarar dudas
- Expresar definiciones que se encontraron en la resolución de problemas

d. *El razonamiento:* Actividades intelectuales de manipulación de información para producir nueva información a partir de ella. Por ejemplo, actividades que consisten en abstraer conceptos o relaciones, hacer conjeturas, hacer deducciones, dar ejemplos y contraejemplos, argumentar, evaluar razonamientos, etcétera."

actividad 29

Con la información anterior y el material del Anexo VIII, piensen y discutan a qué clase pertenece cada actividad de la secuencia propuesta. ■

¿Qué objetivos podrían formularse a partir de esta secuencia?

Se espera que los niños puedan:

- Identificar cuadrados y triángulos en los modelos
- Reproducir y construir cuadrados y triángulos con fósforos
- Construir cuadrados y triángulos con la regla
- Distinguir ciertas propiedades de los cuadrados y de los triángulos: lados congruentes y ángulos
- Diferenciar líneas rectas de curvas
- Reconocer patrones numéricos en las tablas.
- Utilizar medidas no convencionales y convencionales para medir
- Utilizar una escala para construir figuras
- Implementar procedimientos multiplicativos y divisivos para calcular la cantidad de fósforos
- Utilizar distintas estrategias de conteo
- Leer e interpretar enunciados orales, escritos y gráficos
- Localizar datos e incógnitas en enunciados escritos, gráficos y orales
- Utilizar la regla graduada para reconstruir figuras
- Completar patrones numéricos
- Anticipar y verificar transformaciones en figuras
- Leer, interpretar y explicar relaciones numéricas dadas en patrones y tablas.

¿Qué contenidos del Diseño Curricular se abordan con esta secuencia?

	GEOMETRÍA
57	Líneas: clasificación de curvas y rectas
59	Posición y forma. Discriminación
58	La regla. Uso para el trazado de rectas
63	Construcciones de figuras simples: cuadrado, triángulo, rectángulo
67	Reproducción de figuras
70	La resolución de situaciones problemáticas desarrollando estrategias personales para construir y/o reproducir a partir de la interpretación de datos
71	Denominación de conceptos y relaciones simples. Léxico geométrico

	NÚMERO Y OPERACIONES
1	El número natural. Funciones y usos en la vida cotidiana. (contar, ordenar, cardinalizar, medir, identificar)
9	Patrones (regularidades numéricas)
10	Tablas representativas de regularidades numéricas
11	La interpretación de patrones numéricos
19	Multiplicación y división por una cifra de números naturales (tablas, operaciones inversas, escalas ascendentes u descendentes)
23	La lectura e interpretación de enunciados (orales, escritos y gráficos)
24	La localización de datos e incógnitas en enunciados (orales, escritos y gráficos)
39	Patrones, tablas, diagramas de la ejemplificación de relaciones numéricas

	MEDICIONES
79	Longitud. Unidades no convencionales y convencionales (cm)
80	La regla graduada
84	El uso de instrumentos de geometría
85	La elaboración de estrategias personales de medición

¿Cómo podemos organizar estos contenidos por año?

	PRIMER AÑO	SEGUNDO AÑO	TERCER AÑO
¿Qué logros implican la concreción de dichos objetivos?	Que identifiquen la cantidad de cuadrados y triángulos que hay en las figuras con la ayuda de recursos adecuados. Que reproduzcan modelos con fósforos Que transformen figuras sobre la base de informaciones dadas Que encuentren una estrategia de conteo para identificar los cuadrados y triángulos.	Que identifiquen en forma autónoma la cantidad de cuadrados y triángulos que hay en las figuras. Que reproduzcan modelos con fósforos en distintas posiciones. Que construyan cuadrados y triángulos sobre la base de informaciones dadas utilizando los fósforos. Que expresen oralmente ciertas propiedades de los cuadrados y triángulos: congruencia de lados. Que identifiquen y continúen un patrón numérico.	Que identifiquen la cantidad exacta de cuadrados y triángulos que hay en las figuras. Que reproduzcan modelos con fósforos en distintas posiciones y sean capaces de crear otros nuevos. Que construyan cuadrados y triángulos sobre la base de informaciones dadas utilizando los fósforos y la regla. Que enuncien en forma oral y escrita ciertas propiedades de los cuadrados y triángulos: congruencia de lados y ángulos. Que identifiquen, completen y extiendan un patrón numérico.
¿Qué contenidos de los ejes del diseño se desarrollan?	*Número y operaciones* El número natural. Funciones y usos en la vida cotidiana. (contar, identificar). La lectura e interpretación de enunciados (orales, escritos y gráficos).	*Número y operaciones* El número natural. Funciones y usos en la vida cotidiana. (contar, identificar). Patrones (regularidades numéricas). Tablas representativas de regularidades numéricas. La interpretación de patrones numéricos. Multiplicación y división por una cifra de números naturales (tablas, operaciones inversas, escalas ascendentes u descendentes). La lectura e interpretación de enunciados (orales, escritos y gráficos). La localización de datos e incógnitas en enunciados (orales, escritos y gráficos). Patrones, tablas, diagramas de la ejemplificación de relaciones numéricas.	*Número y operaciones* El número natural. Funciones y usos en la vida cotidiana. (contar, identificar). Patrones (regularidades numéricas). Tablas representativas de regularidades numéricas. La interpretación de patrones numéricos. Multiplicación y división por una cifra de números naturales (tablas, operaciones inversas, escalas ascendentes u descendentes). La lectura e interpretación de enunciados (orales, escritos y gráficos). La localización de datos e incógnitas en enunciados (orales, escritos y gráficos). Patrones, tablas, diagramas de la ejemplificación de relaciones numéricas.

	Nociones geométricas Posición y forma. Discriminación. Reproducción de figuras (cuadrados y triángulos). La resolución de situaciones problemáticas desarrollando estrategias personales para reproducir figuras a partir de la interpretación de datos. Líneas: clasificación de curvas y rectas.	*Nociones de geometría* Líneas: clasificación de curvas y rectas. Posición y forma. Discriminación. La regla. Uso para el trazado de rectas. Construcciones de figuras simples: cuadrado, triángulo. Reproducción de figuras. La resolución de situaciones problemáticas desarrollando estrategias personales para construir y/o reproducir a partir de la interpretación de datos. Denominación de conceptos y relaciones simples. Léxico geométrico.	*Nociones de geometría* Líneas: clasificación de curvas y rectas. Posición y forma. Discriminación La regla. Uso para el trazado de rectas. Construcciones de figuras simples: cuadrado, triángulo, rectángulo. Reproducción de figuras. La resolución de situaciones problemáticas desarrollando estrategias personales para construir y/o reproducir a partir de la interpretación de datos. Denominación de conceptos y relaciones simples. Léxico geométrico.
			Mediciones Longitud. Unidades no convencionales y convencionales (cm). La regla graduada. El uso de instrumentos de geometría. La elaboración de estrategias personales de medición.
¿Qué conceptos del área implican?	Figuras: cuadrados y triángulos. Discriminación e identificación. Reproducción de figuras. El número natural como recurso para contar e identificar.	Figuras: cuadrados y triángulos. Discriminación. Reproducción y construcción con material concreto. Patrones numéricos. El número natural como recurso para contar e identificar.	Figuras: cuadrados, triángulos y rectángulos. Discriminación. Propiedades de las figuras: congruencia de lados y ángulos. Reproducción y construcción con material concreto y regla graduada. Medición de longitudes. Patrones numéricos. El número natural como recurso para identificar, contar y operar.

Segundo Ciclo

Presentamos una serie de actividades secuenciadas para que puedan trabajarse en el segundo ciclo.

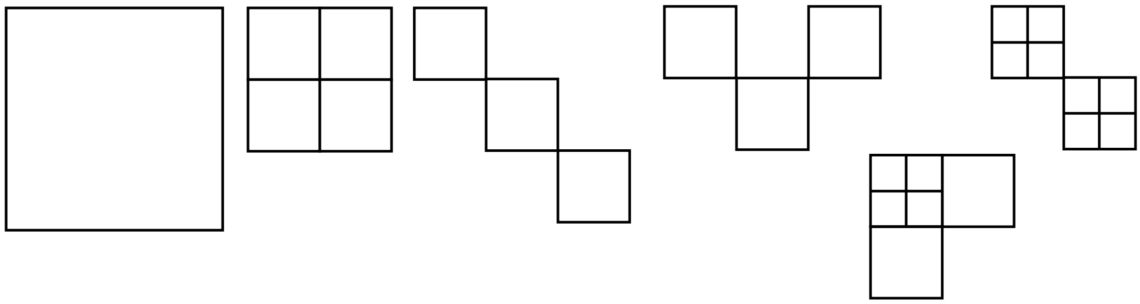
Actividad 1

Organizar a los niños en parejas y entregarles 12 fósforos (o 16, según los agrupamientos) y una hoja blanca para dibujar las figuras que armen. Pedirles que construyan con todos los fósforos figuras compuestas por cuadrados. Cada vez que armen una figura, deberán dibujarla en la hoja.

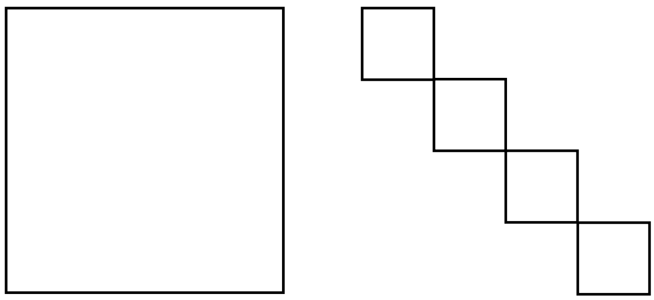
Si es un docente de escuela rural, puede organizar a los grupos a su cargo entre alumnos de 4º y 5º ó 5º y 6º, o algunos de 4º con algunos de 5º. Si es un docente de escuela urbana, lo hará en base a los conocimientos de los alumnos.

El registro puede realizarse en el pizarrón o en un afiche, como en el caso del primer ciclo. Esto permitirá que todos los alumnos vean otras construcciones distintas con fósforos.

Algunas posibles construcciones con 12 fósforos



Algunas posibles construcciones con 16 fósforos



Actividad 2

Ahora vamos a trabajar sólo con cuadrados. Para organizar mejor la información completaremos una tabla. Obsérvenla y traten de encontrar alguna relación entre las variables.

Número de fósforos por lado	1	2	3	....	5	....	....	....
Número de fósforos totales				16	....	36	....	....

En esta situación se da una relación de proporcionalidad directa entre el número de fósforos por lado y la cantidad de fósforos totales. Algunas intervenciones interesantes por parte del docente en relación con el trabajo emprendido por los alumnos pueden ser:

- Que analicen cómo aumentan los lados y la cantidad de fósforos totales
- Orientar al reconocimiento de propiedades de la proporcionalidad
- Encontrar una constante y proponer cómo calcularla.

El mismo trabajo puede realizarse con los triángulos equiláteros. También es posible utilizar la representación en los ejes cartesianos. En el eje Y se ubica el número total de fósforos y en el X los fósforos por lado. Esto permitirá a los alumnos pasar de una representación a otra: de tabla a gráfico cartesiano.

Actividad 3

Armar todos los rectángulos posibles con un máximo de 20 fósforos. Utilizar la siguiente tabla para organizar mejor los datos[40].

Nº fos. Largo	Nº fos. Ancho	Nº fos. totales
1	1	4
1	2	6
1	3	8
2	2	8
1	4	10
2	3	10
1	5	12
2	4	12
3	3	12
1	6	14
2	5	14
3	4	14
1	7	16
2	6	16
3	5	16
4	4	16
1	8	18
2	7	18
3	6	18
4	5	18
1	9	20
2	8	20
3	7	20
4	6	20
5	5	20

En este caso, el docente debe lograr que sus alumnos descubran alguna relación entre las distintas variables. Por ejemplo: "la cantidad de fósforos totales aumenta de dos en dos"; "la suma de los fósforos del largo más la de los anchos es la mitad de los fósforos totales", etcétera.

Se pueden realizar preguntas como:

- ¿cuál es el mínimo de fósforos con los que se puede armar un rectángulo?

- Las figuras de 1 de largo y 1 de ancho => 4 fósforos; 2 de largo y 2 de ancho => 8 fósforos; 3 de largo y 3 de ancho => 12 fósforos; 4 de largo y 4 de ancho => 16 fósforos; 5 de largo y 5 de ancho => 20 fósforos, ¿son rectángulos o cuadrados?

Estos ejemplos van a permitir trabajar con alumnos de 6º (e incluso 7º), la relación entre propiedades de las figuras: "El cuadrado es un rectángulo porque tiene cuatro ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos". Es posible que los alumnos no encuentren todos los rectángulos, inclusive que no aparezcan los cuadrados, esto llevará a que la propuesta surja del docente: ¿les parece que esta figura (de 5 de largo y 5 de ancho => 20) iría en la tabla?, ¿por qué?

[40] A los alumnos se les da la tabla solamente con los títulos, aquí la hemos incluido resuelta a efectos de continuar con la explicación.

Actividad 4

Dibujar con la regla los cuadrados construidos en la actividad 1, respetando la medida de los fósforos. Calcular el perímetro de cada uno en cm.

Es posible que aparezcan errores en la medición cuando se haga la validación debido a la inexactitud al medir o al instrumento utilizado. Es una buena oportunidad para trabajar estrategias como la aproximación, el truncamiento y el redondeo.

Es probable que los alumnos adviertan con rapidez que los dibujos de las construcciones son muy grandes para realizarlos en las hojas que disponen; si los realizan con la medida de los fósforos, esta será una buena oportunidad para trabajar con escalas. Por ejemplo: una escala propuesta por un alumno podría ser 1 fósforo = 1 cm.

Se podría completar una tabla como la siguiente:

Lado del cuadrado en cm	1	2	3	4	5
Perímetro en cm	4	8	12	14	20

¿Cómo podemos hacer para calcular el perímetro teniendo como dato la medida del lado?

Con este tipo de preguntas se espera llegar a construir con los alumnos expresiones tales como:

P = 4 x L.

En el caso de que se trabajen con triángulos equiláteros: P = 3 x L.

actividad 30

Otro contenido interesante para trabajar es la ampliación y reducción de figuras. Propongan consignas con estas indicaciones. Llámenlas **Actividad 5.** ■

Actividad 6

Con las siguientes medidas de perímetros de cuadrados, decidan si se pueden construir usando fósforos.

Perímetros en cm	345	122	400	528	204	62
¿Son cuadrados?	(No)	(No)	(Sí)	(Sí)	(Sí)	(No)

Esta actividad apunta a que los alumnos descubran que los únicos valores que cumplen con estos requisitos son los múltiplos de 4.
En el caso de los triángulos serían los múltiplos de 3.

¿Qué pasa con los rectángulos? ¿Puede haber alguna relación parecida? Observemos:

4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 – 20, ¿son múltiplos de 2 mayores o iguales a 2?

Actividad 7

Se realiza en parejas. Un alumno dice un número del 1 al 50 con el que se puede o no formar un cuadrado con fósforos. El compañero dice si es posible o no.

Actividad 8

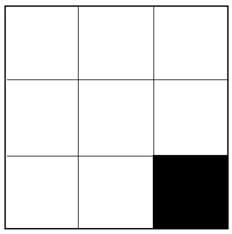
Se reparten 5 cartas a cada pareja y los alumnos decidirán si se puede o no construir, con ese número de fósforos, triángulos equiláteros, cuadrados y rectángulos, y deben argumentar las decisiones.

Cartas con números: 25 20 12 120 324

Esta actividad apunta a trabajar los múltiplos y divisores y los criterios de divisibilidad.

Actividad 9

Retomar los cuadrados construidos con fósforos de la actividad 1 y ver cuántas veces "entra" esta unidad en los mismos. La unidad o pieza debe ser un cuadrado de lado 1 fósforo. En este caso la unidad "entra" 9 veces.



Se puede trabajar con una tabla para visualizar mejor la información:

Nº de fós. por lado	1	2	3	4	5	6
Cuadrados unidad totales	1	4	9	16	25	36

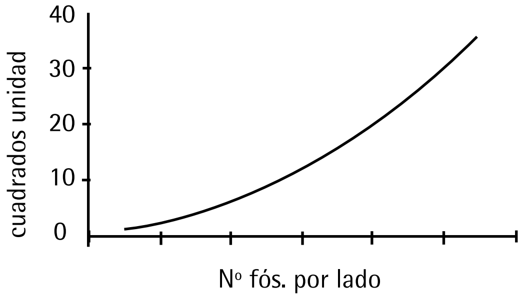
Conviene intervenir para que los alumnos observen la regularidad que existe entre la cantidad total de fósforos: 1 4 9 16 25 36

¿Cómo se obtienen la cantidad de cuadrados que siguen?

Algunos alumnos argumentarán: multiplicando dos veces el lado del cuadrado 4 x 4= 16 y otros, pueden opinar que elevando al cuadrado el lado.

Para un 6º año podemos trabajar potencia cuadrada y relacionar este concepto con el de función cuadrática.

Si tenemos la tabla, podemos trasladar esa información a una representación cartesiana y encontrar una expresión que permita calcular la cantidad de cuadrados necesarios.
Por ejemplo: $C = L^2$ C = unidades totales L = fósforos por lado



En realidad, este gráfico debería ser de puntos. Unimos los puntos con una curva para que se "vea" la curva a la que pertenecen.

Un trabajo parecido podemos hacer para los triángulos equiláteros utilizando como unidad el triángulo:

Nº de fós. por lado	1	2	3	4	5
Triángulos unidad	1	4	9	16	25

Un recurso válido para trabajar estos conceptos son las tramas cuadrangulares y triangulares.[41]

¿Qué observamos de la tabla?

Para obtener la cantidad de triángulos unidad debemos multiplicar dos veces la cantidad de fósforos del lado del triángulo o elevarla al cuadrado.

La secuencia debería continuar actividades que apunten a trabajar las construcciones de triángulos, cuadrados y rectángulos, utilizando instrumentos de geometría, en lo que intervendrán expresiones decimales y podrán calcularse perímetros. Se pueden incorporar, también, los contenidos referidos a "posibilidad de construcción de triángulos y cuadriláteros". El trabajo con la medición de unidades arbitrarias es la puerta de entrada al concepto de área de figuras planas.

actividad 31

Proponga, por lo menos, cuatro actividades del estilo sugerido. Indique en cada caso, las características de cada una y los logros que se pueden obtener. ■

¿Qué objetivos podrían formularse a partir de esta secuencia?

Que los alumnos puedan:

- Identificar cuadrados, triángulos y rectángulos en modelos
- Reproducir y construir cuadrados, triángulos y rectángulos con fósforos
- Construir cuadrados, triángulos y rectángulos con instrumentos de geometría
- Distinguir ciertas propiedades de los cuadrados, triángulos y rectángulos: lados congruentes y paralelos, ángulos congruentes y rectos, ejes de simetría, diagonales congruentes, etcétera
- Reconocer y crear patrones numéricos

[41] Véase Anexo IX.

- Completar tablas donde se dan relaciones funcionales
- Utilizar medidas no convencionales (unidades cuadradas, triangulares y rectangulares) y convencionales para medir
- Utilizar una escala para construir figuras
- Calcular perímetros de figuras
- Utilizar los criterios de divisibilidad
- Representar situaciones en los ejes cartesianos
- Encontrar expresiones que permitan calcular el perímetro de triángulos y cuadrados, la cantidad de cuadrados unidad con que se puede cubrir a distintos cuadrados , etcétera
- Estimar longitudes y áreas
- Agrandar y reducir figuras según un factor de escala
- Calcular superficies de cuadrados, triángulos y rectángulos
- Implementar procedimientos multiplicativos y divisivos para calcular
- Leer e interpretar enunciados orales, escritos y gráficos
- Localizar datos e incógnitas en enunciados escritos, gráficos y orales
- Anticipar y verificar transformaciones en figuras
- Leer, interpretar y explicar relaciones numéricas dadas en patrones y tablas

¿Qué contenidos del Diseño Curricular se abordan con esta secuencia?

	GEOMETRÍA
46	Sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el plano (coordenadas cartesianas)
47	Paralelismo y perpendicularidad
48	La validez de las generalizaciones. Ejemplos y contraejemplos
49	La lectura y representación de puntos sobre la base de coordenadas en el plano
50	Ángulos: Rectos y agudos
53	Figuras: elementos y propiedades de triángulos y cuadriláteros
54	La búsqueda de regularidades en un conjunto de figuras
55	El uso de un vocabulario geométrico adecuado en la denominación, explicación y definición de conceptos y relaciones
57	Tablas. Expresión de relaciones geométricas
58	El uso de diferentes formas de lenguajes matemáticos en la expresión de relaciones entre variables en contextos geométricos (palabras, tablas, gráficos)

59	Funciones en contextos geométricos
60	Reproducción, descripción y construcción de figuras planas
64	Agrandamiento y reducción de figuras

	NÚMERO Y OPERACIONES
13	Divisibilidad
14	La validez de las generalizaciones. Ejemplos y contraejemplos
30	Decimales. Suma, resta, multiplicación
36	Funciones. Forma de expresiones mediante tablas y gráficos cartesianos
45	Modelización de situaciones problemáticas mediante tablas y fórmulas
44	Aplicación del concepto de razón a problemas de escala

	MEDICIONES
66	Sistemas de una longitud
67	Perímetro. Concepto
69	Area: concepto. Unidades no convencionales
70	La estimación de longitudes y de áreas
71	La construcción de fórmulas y su uso para el cálculo de perímetros de triángulos y cuadriláteros

	TECNOLOGÍA
98	El uso de instrumentos: regla, compás, transportador. Construcción de figuras

¿Cómo podemos organizar estos contenidos por año de la EGB?

	CUARTO AÑO	QUINTO AÑO	SEXTO AÑO
¿Qué se logra con la concreción de dichos objetivos?	Que puedan construir cuadrados, y triángulos con instrumentos de geometría. Que identifiquen la cantidad de cuadrados y triángulos que hay en las figuras.	Que identifiquen la cantidad de cuadrados , triángulos y rectángulos que hay en las figuras. Que puedan reconocer ciertas propiedades de los cuadrados y triángulos: congruencia de lados, congruencia y abertura de ángulos, lados paralelos, diagonales congruentes.	Que identifiquen la cantidad de cuadrados, triángulos y rectángulos que hay en las figuras. Que puedan reconocer ciertas propiedades de los cuadrados y triángulos: congruencia de lados, paralelismo de lados, congruencia y abertura de ángulos, ejes de simetría, diagonales congruentes.

	Que puedan reconocer ciertas propiedades de los cuadrados y triángulos: congruencia de lados, congruencia y abertura de ángulos, lados paralelos Completen tablas.	Que identifiquen y completen un patrón numérico. Que puedan agrandar y reducir figuras utilizando distintos factores de escalas enteros. Completen tablas de proporcionalidad directa y no proporcionalidad.	Que identifiquen, completen y extiendan un patrón numérico. Que puedan agrandar y reducir figuras utilizando factores d escalas enteros y decimales. Reconozcan relaciones funcionales en las situaciones vistas.

¿Qué contenidos de los ejes del diseño se desarrollan?	*Número y operaciones* Divisibilidad. Cálculo de múltiplos y divisores de un número Relaciones numéricas. Reconocimiento, descripción, completamiento y creación de un patrón numérico. Lectura y construcción de relaciones numéricas (proporcionales y no proporcionales). *Nociones geométricas* Figuras. Elementos y propiedades de triángulos y cuadriláteros (congruencia de lados, paralelismo de lados, congruencia y abertura de ángulos). Construcción con regla y compás. Reproducción, descripción y construcción de figuras planas (cuadrados y triángulos). El uso de distintas formas del lenguaje matemático en la expresión de relación entre variables en contextos geométricos (palabras, tablas). Mediciones. Sistemas de una longitud. Perímetro. Amplitud de un ángulo. El transportador. Area: unidades no convencionales.	*Número y operaciones* Divisibilidad. Cálculo de múltiplos y divisores de un número. Reconocimiento, descripción, completamiento y creación de un patrón numérico. Distintas formas de expresar relaciones funcionales o no entre variables (verbal, en tablas y gráficos). *Nociones de geometría* Figuras. Elementos y propiedades de triángulos y cuadriláteros (congruencia y paralelismo de lados, congruencia y abertura de ángulos, ejes de simetría,. Congruencia de diagonales. Construcción con regla y compás. Ampliación y reducción de figuras según un factor de escala entero. Reproducción, descripción y construcción de figuras planas (triángulo, cuadrado, rectángulo). El uso de distintas formas del lenguaje matemático en la expresión de relación entre variables en contextos geométricos (palabras, tablas).	*Número y operaciones* Divisibilidad. Cálculo de múltiplos y divisores de un número. Potencia cuadrada. Reconocimiento, descripción, completamiento y creación y explicitación simbólica de la ley que rige un patrón numérico. Distintas formas de expresar relaciones funcionales o no entre variables (verbal, en tablas y gráficos). *Nociones de geometría* Figuras. Propiedades de triángulos y cuadriláteros (congruencia y paralelismo de lados, congruencia y abertura de ángulos, ejes de simetría.. Congruencia de diagonales. Construcción con regla y compás. Ampliación y reducción de figuras según un factor de escala entero y decimal. Reproducción, descripción y construcción de figuras planas(triángulo, cuadrado, rectángulo). El uso de distintas formas del lenguaje matemático en la expresión de relación entre variables en contextos geométricos (palabras, tablas, gráficos, fórmulas).

		Mediciones Sistemas de una longitud. Perímetro: concepto Area. Unidades no convencionales. La construcción de fórmulas y su uso para calcular perímetros. La estimación de perímetros.	*Mediciones* Sistemas de una longitud. Perímetro: concepto Area. Unidades no convencionales. La construcción de fórmulas y su uso para calcular perímetros y áreas. La estimación de perímetros y áreas.
¿Qué conceptos del área están implicados	Figuras: cuadrados y triángulos. Discriminación e identificación. Reproducción, construcción y descripción de figuras. Divisibilidad. Relaciones numéricas (tablas).	Figuras: cuadrados, triángulos y rectángulos. Propiedades. Reproducción y construcción con material concreto e instrumentos de geometría. Patrones numéricos. Divisibilidad. Criterios. Figuras que se agrandan y se reducen. Escalas. Relaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad. Medición de perímetros. Relaciones funcionales y no funcionales. Area: medidas no convencionales. Lenguajes matemáticos (palabras, tablas).	Figuras: cuadrados, triángulos y rectángulos. Propiedades de las figuras: congruencia de lados y ángulos. Reproducción y construcción con material concreto y regla graduada. Patrones numéricos. Divisibilidad. Criterios. Agrandamiento y reducción de figuras. Escalas. Relaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad. Medición de perímetros. Relaciones funcionales y no funcionales. Area: medidas no convencionales. Lenguajes matemáticos (palabras, tablas, gráficos, fórmulas).

Hasta esta punto presentamos una organización de los contenidos por año y por ciclo, relacionando los distintos ejes del diseño curricular.

actividad 32

Organice con sus colegas una secuenciación de actividades tomando un contenido que pertenezca a un eje y pueda vincularse con diferentes ejes a lo largo de los tres años. ■

actividad 33

La organización de los contenidos a partir de redes es una buena estrategia de trabajo. Elabore alguna red que muestre esa relación. ■

A modo de cierre

Esperamos sinceramente que las reflexiones propuestas y las discusiones que se plantearon hayan arrojado alguna luz acerca de qué debe tenerse en cuenta para organizar los contenidos de matemática en las escuelas, de modo de lograr los más óptimos aprendizajes para todos los niños y los jóvenes. Con docentes que se esfuercen en conocer cada día más acerca de su trabajo todos los alumnos tendrán, cada vez, mejores posibilidades de aprender más y mejor, independientemente de los estímulos que puedan recibir en sus hogares.

No se logrará un aprendizaje inmediato, ya que la búsqueda no es sencilla y tampoco se puede pretender que todos los alumnos resuelvan los mismos problemas, con el mismo algoritmo y al mismo tiempo. Sin embargo, se pueden formar alumnos reflexivos, independientes, que confíen en su capacidad de hacer matemática y dispuestos a aprender un poco más de simbología matemática para representar *significados conocidos* y así ampliar su poder de resolver problemas.

> Reconocer la lentitud de los procesos de apropiación de conocimientos, admitir que el "tiempo didáctico" se mide en años y no en semanas, es un paso importante. Conocer la complejidad de los caminos que el niño debe recorrer (jerarquía de los problemas, de los procedimientos, de las representaciones simbólicas) constituye una ayuda directa para las decisiones que hay que tomar en las clases y en las instituciones educativas.[42]

[42] Gerard Vergnaud y Graciela Riccó, "Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos", en *Revista Argentina de Educación* nº. 6, Asociación de Graduados en Ciencias de la Educación, octubre de 1985.

Anexos

I. La proporcionalidad en la medida

II. Las operaciones

III. Guías de lectura

IV. Para comparar con las propias reflexiones
acerca de las fracciones

V. El papel de la resolución de problemas en
el área de matemática

VI. La resolución de problemas en el área de matemática

VII. Las fracciones y los decimales

VIII. Las dimensiones de los contenidos

IX. La trama cuadrangular y la trama triangular

Anexo I
La proporcionalidad en la medida

Magnitudes: Son las cualidades medibles de los cuerpos; por ejemplo la longitud, el peso, la capacidad, el volumen, etcétera.

Cantidad: Es un caso particular de una magnitud; por ejemplo la longitud de este hilo.

Valor de una cantidad: Es un número concreto, por ejemplo 100 m.

Unidad de medida: Es el "patrón de comparación" en nuestro ejemplo el m.
Por convención y en el caso de la longitud se adoptó el metro –m-.

Medida de una cantidad: Es un número abstracto, que resulta de dividir la cantidad por la unidad de medida correspondiente. Ej. $\frac{100 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 100$; cien es la medida de la cantidad 100 m con respecto a la unidad metro.

Se suele sintetizar en el concepto "cantidad" las nociones de "cantidad" y "valor de una cantidad".

También se suele utilizar indistintamente "patrón de comparación", "patrón" y "unidad de medida".

Las mal llamadas "reducciones", no son tales, porque no reducen nada. Según Piaget son *sustituciones por compensación*, ya que si multiplicamos la medida de un número y dividimos la unidad de medida por el mismo número, la cantidad permanece invariable.

Ejemplo:

$$\overset{\times 10}{18 \text{ m}} \;=\; \underset{:10}{180 \text{ dm}}$$

Para facilitar la expresión y no caer en el error común, las llamaremos equivalencias.

Agregaremos que si se mide una misma cantidad con diferentes unidades puede observarse que el valor de la cantidad y la unidad de medida se relacionan por una proporcionalidad inversa.

Medida de la cantidad	Unidad de medida
8	m
80	dm

Dicho de manera sencilla si medimos una misma cantidad de alambre con una unidad que duplica a la otra (1/2 m y 1 m) la medida obtenida es la mitad con esta última.

En cambio cuando se miden cantidades diferentes con una misma unidad se relacionan por una proporcionalidad directa.

Valor de la cantidad	Medida de la cantidad
3 m	3
6 m	6

Expresado de manera sencilla, si medimos un trozo de alambre que mide 2 m, cuando medimos otro que es el doble de largo medirá el doble de m, o sea 4 m.

Anexo II
Las operaciones [43]

Para comentar entre todos

¿Todas las calculadoras funcionan igual?
Consigan varias calculadoras diferentes y realicen algunas pruebas:

- Si se pulsan las mismas teclas en diferente orden ¿da lo mismo?

  [3] [+] [2] [×] [4] [=]

  [2] [×] [4] [+] [3] [=]

- ¿Qué pasa cuando se repite una tecla?
  Copien los números que van apareciendo en el visor y descubran cómo se comportan las distintas máquinas.

  ▶ Si se repite [+] o [×]

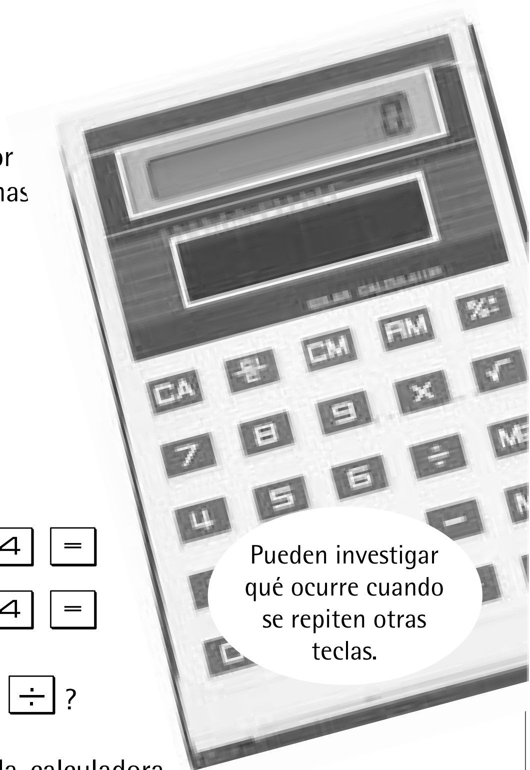
  [3] [+] [2] [+] [+] [+]

  [3] [×] [2] [×] [×] [×]

  ▶ Si se repite [=]

  [3] [×] [2] [=] [5] [=] [3] [=] [4] [=]

  [2] [×] [3] [=] [5] [=] [3] [=] [4] [=]



- ¿Qué pasaría si no funcionaran las teclas [×] ni [÷]?

  Encuentren los resultados de estas cuentas con la calculadora pero sin usar [×] para multiplicar ni [÷] para dividir.
  Si se les ocurre más de una forma, anótenlas todas.

  [3] [7] [×] [8]

  [1] [3] [7] [×] [6] [4]

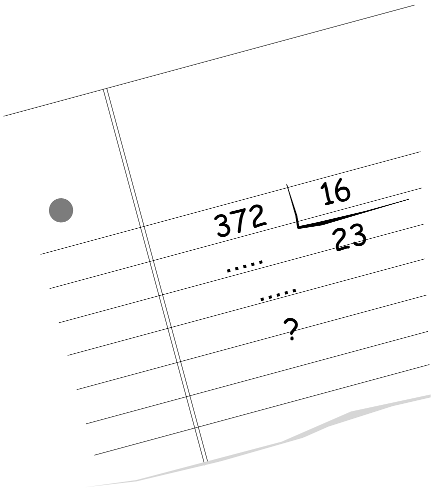
  [2] [6] [7] [÷] [1] [5]

  [8] [7] [0] [0] [0] [÷] [2] [5] [0]

  [1] [8] [0] [÷] [1] [5]

  [5] [4] [9] [0] [÷] [9] [0]

[43] Tomado de Manual Plus Ultra 5. Buenos Aires, Plus Ultra, 1995.
Se reproduce aquí por gentileza de la editorial Plus Ultra.



- ¿Cómo se puede conocer el resto de una división?

3 7 2 ÷ 1 6 = 23.25

Anoten qué operaciones pueden hacer con la calculadora para descubrir el resto señalado así: ?

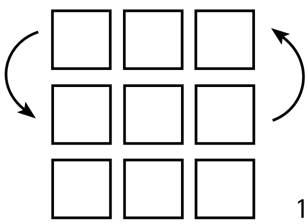
Prueben con otras divisiones y escriban las instrucciones para que otro chico pueda calcular el resto de una división cualquiera sin hacer toda la cuenta con lápiz y papel.

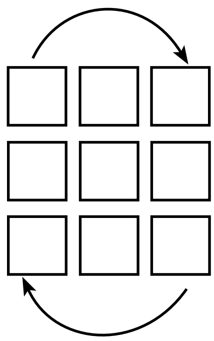
Para investigar con materiales

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1. Este cuadrado es mágico; la suma de cada una de las filas, las columnas y las diagonales da el mismo número. ¿Cuál es?

- Recortá nueve cuadraditos, numeralos del 1 al 9. Disponelos de manera que se forme un cuadrado mágico diferente al del modelo.


1


2

► Si cambiás el orden de dos filas consecutivas, el cuadrado que resulta, ¿también es mágico? (1)

► Si cambiás el orden de dos columnas no consecutivas, ¿resulta un cuadrado mágico? (2)

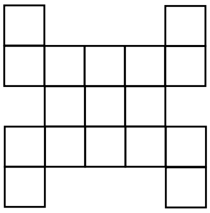
► Si a cada cifra de un cuadrado mágico le sumás 15, ¿se obtiene otro cuadrado mágico?

- Compará tus respuestas con las de otros compañeros. ¿Qué propiedades de la adición aplicaron?

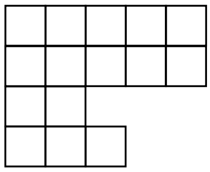
- Escriban en el pizarrón todos los cuadrados mágicos que encontraron.

2. Algunos chicos hicieron estos cálculos para averiguar el número de cuadraditos que hay en cada figura.

- ¿A qué figura corresponde cada cálculo?



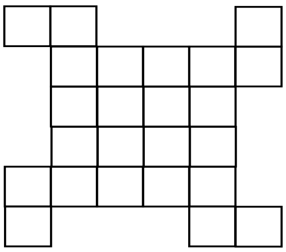
A



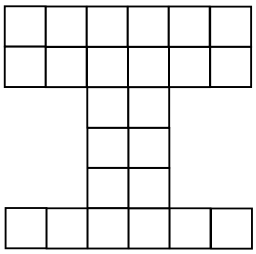
B

5 + 5 + 2 + 3	2 + 5 + 3 + 5 + 2
2 x 2 + 3 x 3 + 2 x 2	4 x 2 + 3 x 2 + 1
2 x 4 + 3 x 3	5 x 5 - 3 x 2 - 1 - 1
4 x 5 - 3 - 2	4 x 3 -1 + 4

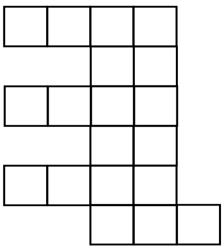
3. Escribí más de un cálculo para hallar el número de cuadrados de cada figura.



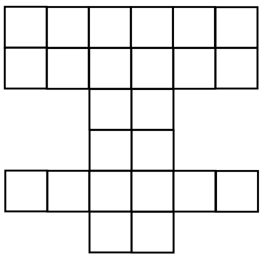
C



D



E



F

- ¿Qué operaciones aplicaste?

4. Dibujá una tabla como esta y completala con los productos que faltan.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2				8					
3									
4		8							
5									
6									
7									
8									
9									81

▶ ¿Cuántos productos diferentes tiene la tabla?

- Estas fichas forman parte de la tabla anterior; copialas y completalas con los números que correspondan.

21	
	32

	35

	54	

16			

30			45

		40
36		

	56

	54	63

15	
18	

48

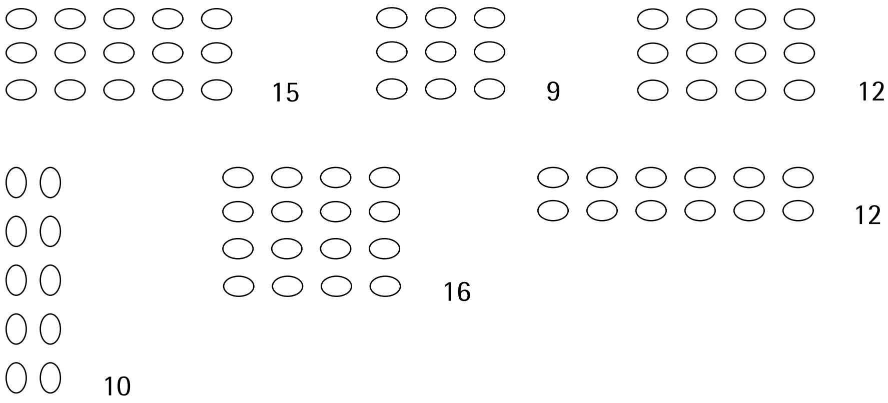
▶ Algunas fichas tienen más de una solución. ¿Cuáles son? ¿Por qué ocurre esto?

- Inventá una ficha rectangular que no tenga una única solución.

- Copiá de la tabla dos fichas rectangulares que tengan más de seis números.
  En cada una multiplicá los pares de números ubicados en los vértices opuestos. ¿Cómo es el resultado? ¿Ocurre lo mismo con cualquier otro rectángulo? ¿Por qué?

- Compará con las fichas elegidas por otro compañero y discutan por qué sucede esto.

5. Estos dibujos muestran conjuntos de 15, 9, 16, 12, y 10 porotos organizados en filas con el mismo número de elementos en cada una.



- Usá porotos o fichas para explorar qué ocurre con grupos de **25, 18, 13 y 6.**
  Si alguno admite más de una organización rectangular, como **12 = 3 x 4 = 2 x 6**, escribilas todas.

- Repetí la exploración con un pequeño puñado de porotos y otro más grande sin contarlos previamente.

6. Un juego entre dos

- Necesitan dos hojas lisas, una bolsa de porotos y dos dados. Marquen en las hojas 12 casillas.

  ▶ Cada jugador tira los dados y anota la suma.

  ▶ Luego toma de la bolsa, sin contar, todos los porotos que caben en su mano. Debe repartirlos en tantas casillas como indica la suma de los dados. Si sobran porotos los dejará afuera de la hoja; todas las casillas ocupadas tendrán el mismo número de porotos.

  ▶ Al terminar la tarea anoten los resultados en una planilla como esta.

	Números de porotos en cada casilla	Número de casillas ocupadas	Resto
Jugador A			
Jugador B			

¿Qué cuenta pueden hacer para saber quién tiene más porotos?
Gana el juego el que tenga más porotos y haga bien las cuentas.
Organicen entre todos los chicos del grado alguna estrategia para saber quién sacó mayor número de porotos.

Para hablar con propiedad

Adición

$\boxed{18} + \boxed{25} = \boxed{43}$

sumandos — suma o resultado

Multiplicación

$\boxed{4} \times \boxed{13} = \boxed{52}$

factor — factor — producto

La *adición* y la *multiplicación* son operaciones **conmutativas** porque se puede cambiar el orden de los sumandos, o los factores, sin que se modifique el resultado.

$\boxed{25} + \boxed{18} = \boxed{43}$ $\qquad$ $\boxed{13} \times \boxed{4} = \boxed{52}$

La *adición* y la *multiplicación* son operaciones **asociativas** porque los sumandos, o los factores, se pueden asociar de distinta manera sin que cambie la suma o el producto.

$$(3 + 5) + 4 = 3 + (5 + 4)$$
$$8 + 4 = 3 + 9$$
$$12 = 12$$

$$(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$$
$$12 \times 5 = 3 \times 20$$
$$60 = 60$$

Sustracción

$\boxed{528} - \boxed{373} = \boxed{155}$

minuendo — sustraendo — resta o diferencia

División exacta

dividendo	divisor		dividendo	divisor
52	13		52	4
0	4		0	13
resto	cociente		resto	cociente

La *sustracción* y la *división* **no son conmutativas**.

No se puede cambiar el orden del **minuendo** y el **sustraendo**.

No se puede cambiar el orden del **dividendo** y el **divisor**.

Factores y múltiplos

$\boxed{6} \times \boxed{4}$

$\boxed{12} \times \boxed{2}$ $\quad$ 24 $\quad$ $\boxed{24} \times \boxed{1}$

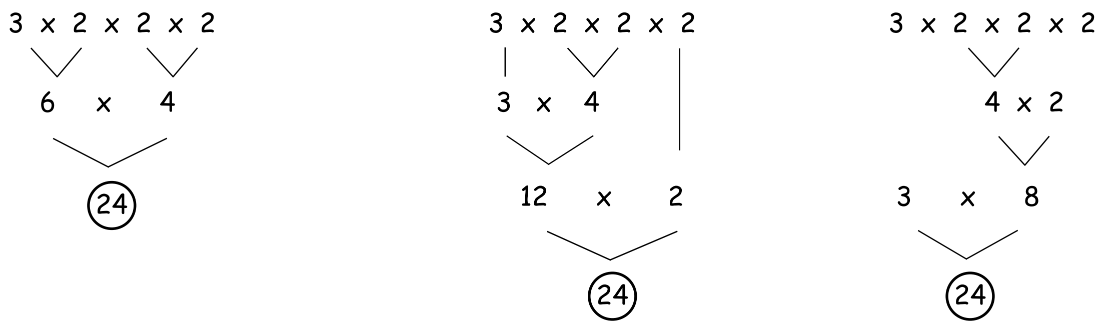
$\boxed{8} \times \boxed{3}$

$\underbrace{\boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{12}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{3}\ \boxed{24}\ \boxed{1}}$

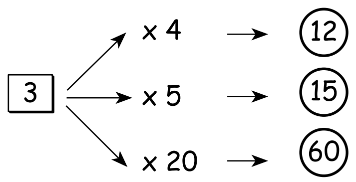
son *factores* de 24

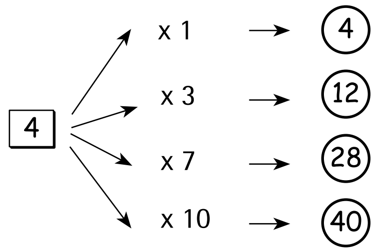
La división de un número por cualquiera de sus factores es exacta.
24 es **múltiplo** de sus factores.

Se pueden construir árboles de factores.



Para encontrar múltiplos de un número sólo hay que *multiplicarlo* por otro:

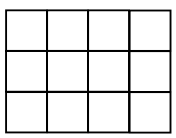




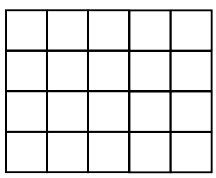
12 15 60 son múltiplos de $\boxed{3}$

4 12 28 40 son múltiplos de $\boxed{4}$

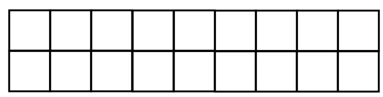
Si un número se puede expresar como producto de dos o más factores, distintos de 1, se llama **compuesto** y puede asociarse a organizaciones rectangulares de varias filas.



12 = 4 x 3



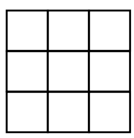
20 = 5 x 4



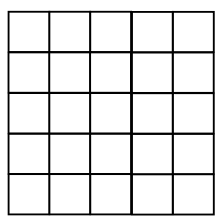
18 = 2 x 9

12 20 18 15 25 **son números compuestos**

Si el número de filas es igual al número de columnas decimos que ese número, además de ser compuesto, es un número cuadrado.

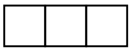


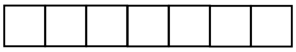
9 = 3 x 3



25 = 5 x 5

Los números que únicamente se pueden asociar a una sola fila se llaman **primos**.





3 y 7 son números primos.

3 = 3 x 1

7 = 7 x 1

El número 1 no es primo ni compuesto.

NO ← ¿El resto es cero? → SI

El dividendo no es múltiplo del divisor.

125 |30
5 4

El producto del divisor por el cociente, más el resto, es igual al dividendo.

$\boxed{30 \times 4 + 5 = 125}$

El dividendo es múltiplo del divisor.

120 |30
0 4

El producto del divisor por el cociente es igual al dividendo.

$\boxed{30 \times 4 = 120}$

Para resolver

1. Encontrá los números que se borraron en este cuadrado mágico. Escribí los cálculos necesarios; podés resolverlos con la calculadora.

19	5	6	16
8		13	11
12	10		15
7		18	4

2. Para sumar mentalmente muchos sumandos conviene conmutar y asociar.

5

3 + 5 + 7 + 2 + 6 + 5 + 4 + 3 = 35

10 10 10

50

12 + 35 + 8 + 15 + 9 = 79

20

Usá estas propiedades para resolver mentalmente:

16 + 25 + 3 + 4 + 7 + 25 =

32 + 15 + 18 + 25 + 12 =

9 + 8 + 7 +2 + 11 + 3 + 7 =

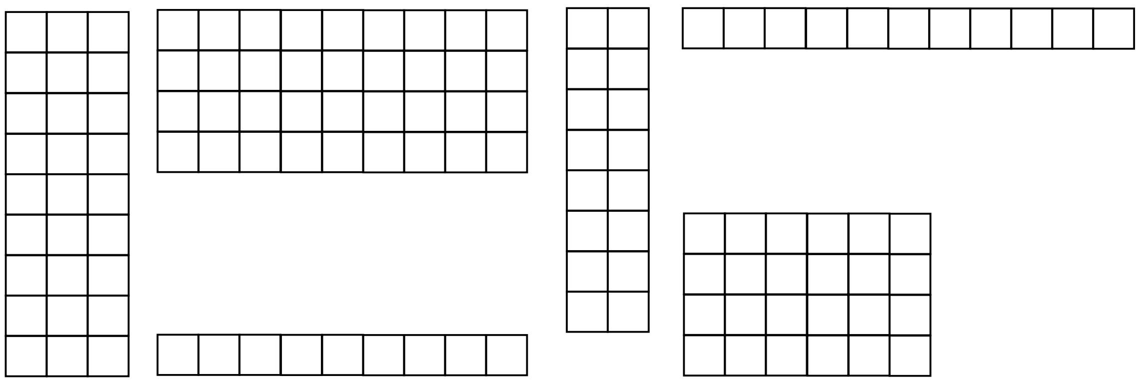
143 + 22 + 16 + 7 + 18 + 24 =

3. a) Escribí los múltiplos de 4 desde 16 hasta 44.
   b) Escribí todos los múltiplos de 7 mayores que 50 y menores que 100.
   c) Escribí los múltiplos de 5 mayores que 100 y menores que 165.
      ¿Qué valores tiene la cifra de las unidades?
      ¿Por qué ocurre lo mismo con todos los múltiplos de 5?

4. Construí dos árboles de factores diferentes para cada producto:

3 x 2 x 5 x 2   5 x 2 x 3 x 3   2 x 3 x 7 x 5

5. Escribí los productos de dos factores que correspondan a cada uno de los rectángulos



- Entre esos rectángulos, ¿cuáles corresponden a números cuadrados? ¿Hay algún número primo? Si es así, ¿cuál es?

6. Dibujá una tabla como esta y completala.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21									30
31									40
41									50
51									60
61									70
71									80
81									90
91									100

- Tachá:
  - ▶ con un color los múltiplos de 2 a partir de 4,
  - ▶ con otro los múltiplos de 3 a partir de 6,
  - ▶ con otro los múltiplos de 5 a partir de 10,
  - ▶ con otro los múltiplos de 7 a partir de 14.

  Observá en tu tabla los números no tachados.

- Escribí todos los números primos menores que 100.

7. a) Recordá que se llaman números pares a los múltiplos de 2. Escribí los números pares mayores que 980 y menores que 1000.
   - ▶ La cifra de las unidades, ¿es par o impar?
   - ▶ ¿Ocurre lo mismo en todos los múltiplos de 2?

b) Escribí los múltiplos de 3 mayores que 500 y menores que 540.

- En cada uno de esos números, sumá las tres cifras. Si resulta un número de dos cifras volvé a sumarlas.

516 ⟶ 5 + 1 + 6 = 12 ⟶ 1 + 2 = 3

¿En todos los casos la suma es 3 o múltiplo de 3?

- Usá la calculadora y explorá si ocurre lo mismo con los múltiplos de tres que tienen cuatro o más cifras.

8. a) ¿Cuál es el resto de dividir 46 por 8?

b) Una costurera tiene 46 botones. Cada camisa lleva 8 botones. ¿Para cuántas camisas le alcanzan?

c) Los 46 turistas que llegaron en el micro, continuarán la excursión en camionetas. Cada camioneta puede llevar 8 personas. ¿Cuántas camionetas se necesitan para que puedan viajar todos?

d) Compará las cuentas que hiciste para resolver los problemas a), b) y c) y las respuestas a esos problemas. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

Para revisar ideas

1. ¿Qué número sigue en cada serie?

3	6	9	12	15	.....
4	8	16	32	64	.....
75	80	85	90	95	.....
5	10	20	40	80	.....
3	5	7	11	13	.....

2. Al dividir 374 por 28, el cociente es 13, ¿cuál es el resto?
¿Qué número habría que agregar a 374 para que la división fuera exacta? ¿Cuál sería el cociente?

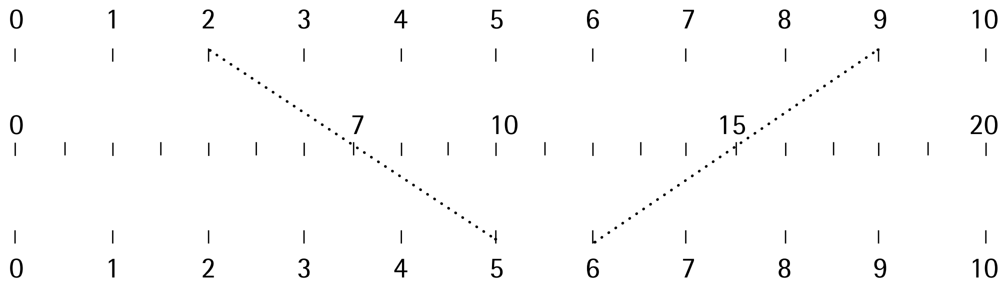
3. ¿Cuál es el número que multiplicado por 24 da por resultado 888?
¿Cuál es el número que multiplicado por 12 da el producto más cercano a 150?
¿Cuál es el número que multiplicado por 18 da el producto más cercano a 860?

4. En los siguientes problemas faltan datos.
Copialos en tu cuaderno; completalos con datos adecuados y resolvelos.
a. Un álbum tiene.......fotografías. En cada página hay.....fotos. ¿Cuántas páginas tiene el álbum?

b. En cada caja hay.......alfajores. Analía compró.........cajas, ¿cuántos alfajores compró?
c. El coro estaba formado por......chicos, ...se retiraron. ¿Cuántos quedan?
d. En 5to grado "A" hay......varones. Un equipo de fútbol tiene......jugadores. ¿Cuántos faltan para formar un equipo?
e. Un camino de.....km, ¿cuántos metros tiene?
f. Mariela tiene......años y Pablo....... ¿Quién es mayor?, ¿cuánto mayor?
g. Ana tiene........monedas de 50 centavos y.........monedas de 10 centavos. ¿Por cuántas monedas de 25 centavos puede cambiarlas?
h. Laura compró.......bananas y..........manzanas. ¿Cuántas frutas trajo?

Para avanzar un poco más

1.

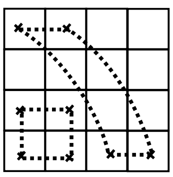


- Observá los números unidos por líneas de puntos. ¿Qué relación hay entre ellos?
- Existe la misma relación en cualquier otro grupo de tres números que se puedan alinear. ¿Por qué?

29			26
	24	23	
	20	19	
17			14

2. Completá los números que faltan en este cuadrado mágico. Recordá que la suma de las columnas, filas y diagonales debe ser la misma.

- Observá que al sumar los 4 números ubicados en los lugares marcados con x da el mismo resultado que al sumar las filas, columnas o diagonales.



- Buscá en el cuadro mágico otros grupos de 4 números que, sumados, también den el mismo resultado.
- Compará este cuadrado mágico con el ejercicio 1 de "Para Resolver". ¿En qué se diferencian?
- Inventá un cuadrado mágico con números menores de 40.

3. ¿Cuántos factores tiene los números cuadrados?
Recordá que 1 es factor de primos y compuestos.

n (número)	1	2	3	4	5	6	7	8
número x número n x n	1	4	9	16	25	36	49	64
cantidad de factores de n x n	1	3	3	5				

Podés organizar una tabla como esta y usar la calculadora para seguir explorando.

- ¿Cómo son los números cuyos cuadrados tienen sólo 3 factores?

Anexo III
Guías de lectura

Guía 1. Parra, C., "Las poderosas reflexiones de los chicos y el trabajo docente". Entrevista a Cecilia Parra[44], en Bressan, A. y otros, *Los CBC y la enseñanza de la matemática*. Buenos Aires, A - Z editora, 1997.

Lean el artículo, analícenlo y luego:

1. Contrasten la respuesta que da Cecilia Parra (pp. 63 a 66) con sus propias experiencias de enseñanza de la matemática en relación con los diferentes procedimientos que utilizan los niños para solucionar los problemas y los errores que suelen cometer.
   Den ejemplos.

2. Analicen y comparen la forma de presentar los símbolos matemáticos y la enseñanza de las operaciones en general que ustedes utilizan, con el ejemplo dado en el texto con respecto a la multiplicación. (pp. 63 a 72)

3. Enumeren los aspectos que deben plantearse los docentes *antes* de la puesta en práctica de una clase o secuencia de clases para la enseñanza de alguna cuestión matemática, según la opinión de Cecilia Parra, si se quiere trabajar de acuerdo con su propuesta (p. 72 y ss.)
   Den ejemplos.
   ¿Y después de su puesta en práctica?

Guía 2. Charnay, Roland, "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra, C. y Saiz, I., (comps.) *Didáctica de la matemática.* Educador, Paidós.

Lean el texto.

1. Dice el autor que las matemáticas han sido construidas al responder preguntas que generaron problemas. También clasifica esas preguntas y problemas: de orden doméstico, relacionadas con otras preguntas de otras ciencias, a partir de cuestiones matemáticas. Teniendo en cuenta el contenido "Cálculo mental", les pedimos que escriban al menos tres problemas (inventados o conseguidos en textos escolares de matemáticas) que correspondan a cada uno de esos contextos.

2. ¿Qué condiciones son fundamentales para definir el sentido de un conocimiento matemático? Elijan un contenido matemático y enumeren los tipos de tareas que deben proponer a los alumnos para lograr definir su sentido.

[44] Cecilia Parra es licenciada en Ciencias de la Educación, especialista en didáctica de la matemática, miembro del equipo de matemática de la Dirección de Currículo del Gobierno Autónomo de la Ciudad de Buenos Aires.

3. Elaboren un cuadro que facilite la comparación de los modelos de aprendizaje presentados por el autor.

4. Elaboren un cuadro en el que figuren los modelos y las posiciones respecto de la resolución de problemas y referencias para cada caso.

5. Los modelos de aprendizaje propuestos por Charnay constituyen modelos teóricos que rara vez se cumplen en forma pura y completa en un aula. Sin embargo, es posible que un docente identifique uno de los modelos con su *hacer* en el aula. Es por eso, que les pedimos:
   a. que cada uno de ustedes elija el modelo que considera más representativo de su actividad. Si bien los tres modelos conviven en el aula, el modelo apropiativo es el que más se acerca a la construcción. Es esperable, entonces, que en las clases de EGB se propicie la presencia del modelo apropiativo. En consecuencia, les pedimos:
   b. que cada uno de ustedes escriba por lo menos tres cambios que debe hacer en su tarea docente habitual, con el fin de aproximarse al modelo apropiativo.
   c. que elaboren una secuencia basada en el modelo apropiativo.

6. Comparen y discutan la definición de problema presentada por el autor en la página 62 y el texto inicial de Bachelard.

7. El autor presenta varios acercamientos a una definición de problema. Transcriban cada uno de ellos y elaboren una definición que consideren pertinente.

8. Ejemplifiquen cada una de las seis *opciones a favor de una elección* con situaciones de la práctica cotidiana.

Guía 3. Chemello. *La enseñanza de la matemática a debate* (véase bibliografía, pp. 49-97).

1. En gran parte de este trabajo encontrarán una serie de problemas con posibilidades de ser presentados en el aula. Los problemas mencionados se ofrecen como ejemplos del desarrollo que corresponde a cada párrafo en el cual se encuentra.
   a. Seleccionen algunos de esos problemas que consideren aptos para el análisis de la "influencia del contrato didáctico en la actividad en el aula".
   b. Una vez seleccionados, reflexionen sobre la posición del docente y de los alumnos frente a cada uno de los problemas elegidos.

2. "El criterio de adquisición de un concepto es su operatividad [...]"

   Párrafo de pp. 84-85
   Sobre la base de lo que hayan interpretado, caractericen cada uno de los siguientes problemas en el contexto del párrafo señalado:
   Cada paquete de pastillas tiene 12 pastillas. ¿Cuántas pastillas tendré en total si dispongo de 4 paquetes?
   Carmen vive en una ciudad de trazado perfecto. Quieren hacer una colecta casa por casa. Ella necesita saber cuántas manzanas tiene la ciudad para luego distribuirse el recorrido. ¿Cómo hará para tener esa información?

3. Si, según Brousseau, "el sentido de un conocimiento matemático se define por un conjunto de situaciones que ha permitido resolver [...]", tomen como base de trabajo los problemas del ítem *"Adquirir un conocimiento es ante todo darle significado"* y redacten no menos de tres situaciones de multiplicación asociadas a $5 \times 3 = 15$.

4. Analicen los siguientes problemas para proponerles a los alumnos.

Un paquete de galletitas de 200 g tiene 36 galletitas
¿Cuánto pesará un paquete con 18 de esas galletitas?
¿Y si hiciéramos un paquete con 72 galletitas?
Si la fábrica resuelve envasar galletitas en paquetes de 150 g,
¿cuántas galletitas entrarán en cada uno de los paquetes?

Anticipando la tarea de los alumnos,
1. presenten, al menos, tres posibles procedimientos de resolución.
2. listen los errores posibles que, de acuerdo con su experiencia, cometerían los niños.
3. ante cada error listado en el punto anterior, indiquen cómo intervendrían ustedes.

Anexo IV
Para comparar con las propias reflexiones acerca de fracciones

Ejemplos orientadores. Área Matemática[45]

De las múltiples variables que inciden en los resultados obtenidos por los alumnos, hay dos sobre las que queremos llamar la atención:

- una de ellas es la secuenciación de contenidos en el ámbito institucional;
- la otra, el enfoque didáctico adoptado por el equipo docente de la institución, vale decir, la propuesta metodológica institucional (estrategias docentes, actividades de los alumnos).

Estas dos variables tienen un claro carácter pedagógico e institucional y definen campos posibles de intervención para ratificar o rectificar rumbos desde el interior de la propia escuela.

Las Actividades 5 y 6 requieren una explícita consideración de ambas variables; casi todas las demás actividades propuestas las involucran en mayor o menor medida.

Por ello, los ejemplos orientadores que presentamos están centrados en las variables en cuestión.

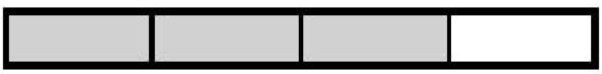
5. Establecer relaciones entre secuencias institucionales de expectativas de logro y contenidos, por un lado, y resultados alcanzados por los alumnos, por el otro.

6. Establecer relaciones entre las propuestas metodológicas de los docentes y los resultados alcanzados por los alumnos.

Acerca de la secuenciación de contenidos: Los significados de las fracciones

Las fracciones tienen significados diversos y admiten múltiples interpretaciones:

a. Una fracción puede interpretarse como *subárea de una región unitaria;* dicha región unitaria es de naturaleza continua y medible, y se toma como total.
Ejemplo: La zona sombreada es 3/4 del total.



Hay evidencias de que este significado de las fracciones es el más fácil de aprender. No obstante, trae algunas dificultades; una de ellas es que no es adecuado para las fracciones

[45] Tomado de Malet, O. y otros, *Orientaciones para interpretar los resultados y tomar decisiones institucionales.* La Plata, DGCyE, 2001.

impropias (fracciones mayores que la unidad); así, los alumnos tienden a interpretar la representación de 5/3 como 5/6 (hay 5 partes sombreadas de un total de 6).
Si a lo largo de los distintos cursos escolares las fracciones son presentadas exclusivamente desde este punto de vista (una práctica bastante usual), es probable que los alumnos no puedan aplicarlas en contextos en los que se ponen en juego otros aspectos del concepto.

b. Una fracción también puede interpretarse como *subconjunto de un conjunto discreto de objetos;* esta interpretación sólo difiere de la anterior en que ahora la fracción no indica una parte de un todo continuo y medible sino una parte de un todo discreto y contable, en el sentido de que sus elementos se pueden contar.
Ejemplo: Marcelo ha comido 3/4 de los caramelos de la bolsa.
Este punto de vista tampoco facilita la interpretación de las fracciones impropias (si una fracción expresa una parte de un todo, es poco coherente que la parte sea mayor que el todo...); no obstante, obliga a considerar explícitamente el tamaño del conjunto al que la fracción hace referencia (no es lo mismo 3/4 de 20 que 3/4 de 100), y se vincula con la noción de porcentaje (3 de 4 es lo mismo que 75 de 100, o sea, el 75 %); es decir, enriquece el concepto de fracción ya que aporta elementos diferenciales respecto de la primera interpretación, a la que complementa.

Los siguientes ítem evalúan este significado de las fracciones:

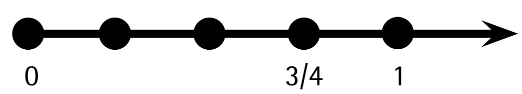
Mauricio y su hermana tienen una caja con 24 compacts. Mauricio retiró 3 compacts de *Los Piojos* y se los prestó a un amigo. Paula retiró 2 compacts de *Los Nocheros* y se los prestó a una amiga. Paula anotó en la caja 19/24; esta anotación representa qué fracción de los compacts.

Prestó Mauricio	☐ 1
Prestó Paula	☐ 2
Quedaron en la caja	☐ 3
Faltan de la caja	☐ 4

Julián compró para su cumpleaños 60 latas de bebida. La mitad de las latas que compró son de gaseosa; de las restantes, la mitad son de jugo de naranja, y la otra mitad son de jugo de pomelo. ¿Cuántas latas de jugo de pomelo compró?

15	☐ 1
20	☐ 2
30	☐ 3
El dato disponible no permite averiguarlo	☐ 4

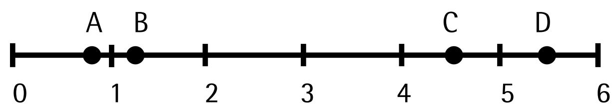
c. Las fracciones son *puntos en la recta numérica.*
Ejemplo:



La representación de las fracciones como puntos en la recta numérica pone el acento en que las fracciones son números, como también lo son el 0 y el 1; en cambio, desde las dos interpretaciones anteriores las fracciones son entendidas como partes de un objeto concreto o de un conjunto de objetos.
¿En qué sentido esta perspectiva –las fracciones como puntos en la recta numérica– hace aportes específicos a la noción de fracción? En primer lugar, facilita la comprensión de

las fracciones impropias (una fracción es un número, y éste bien puede ser mayor que 1); en segundo lugar, presenta las fracciones como una extensión o ampliación del campo de los números naturales y abre la posibilidad de emplearlas en el proceso de medición, que implica el uso de escalas graduadas (la medida de una magnitud –capacidad, longitud, peso, temperatura, etcétera– no necesariamente es un número natural –3 litros, 3 metros, 3 kilos, 3 grados–; también puede ser un número fraccionario –3 ½ litros, 3 ½ metros, 3 ½ kilos, 3 ½ grados–).

Este aspecto de la noción de fracción es evaluado por el ítem siguiente:

> En la recta numérica representada se han ubicado los puntos A, B, C y D. ¿Cuál de ellos corresponde a la fracción 4/5?
>
> 
>
>
> • El punto A ☐ 1
> • El punto B ☐ 2
> • El punto C ☐ 3
> • El punto D ☐ 4

d. Una fracción expresa el *resultado de una división.*

> Ejemplo: Si se reparten equitativamente 3 litros de leche entre 4 chicos, cada uno de ellos beberá 3/4 litros. En otras palabras, 3 dividido 4 da por resultado 3/4 (aunque se tienda a pensar que 3/4 es una división no resuelta más que el resultado de una división...). El hecho de que muchos chicos no se percaten de que las fracciones expresan exactamente el resultado de la división entre dos números enteros parece vincularse con un trabajo escolar insuficiente sobre esta interpretación de las fracciones.

e. Una fracción es una *herramienta para comparar dos medidas o dos conjuntos.*

> Ejemplos: Mara pesa 3/4 de lo que pesa Rita (comparación entre medidas). El número de alumnos de Séptimo "A" es 3/4 del de Séptimo "B" (comparación entre conjuntos). Es interesante notar que la comparación se puede invertir fácilmente: Rita pesa 4/3 de lo que pesa Mara, el número de alumnos de Séptimo "B" es 4/3 del de Séptimo "A". Es decir: no existen en este caso una unidad o un todo naturales y absolutos; cualquiera de los términos de la comparación puede funcionar como unidad o como todo.

El ítem que sigue pone en juego este significado de las fracciones:

> En un criadero de truchas disponen de tres piletones: el de las truchas grandes, el de las truchas medianas y el de las truchas pequeñas. El número de truchas grandes es la octava parte del de truchas pequeñas; el número de truchas pequeñas es el doble del de truchas medianas.
> Entonces, el número de truchas grandes es
>
> • La décima parte del de truchas medianas ☐ 1
> • La sexta parte del de truchas medianas ☐ 2

• La cuarta parte del de truchas medianas ☐ 3
• Cuatro veces el de truchas medianas ☐ 4

f. Una fracción puede tener el significado de una *probabilidad.*

Ejemplo: Si en una bolsa hay tres bolillas rojas y una bolilla azul, la probabilidad de extraer –sin mirar– una bolilla roja es de 3/4.

Disponer de este significado puede facilitar el proceso de comparación de determinadas fracciones. En efecto: 11/16, ¿es menor que 12/17? ¿Es igual? ¿Es mayor?

En términos de probabilidad: si en una bolsa hay 11 bolillas rojas y 5 bolillas azules, la probabilidad de extraer al azar una bolilla roja es 11/16 (hay 11 bolillas rojas sobre un total de 16 bolillas); si se agregara a la bolsa otra bolilla roja, la probabilidad de sacar una bolilla roja aumentaría (hay la misma cantidad de bolillas azules que antes, y una bolilla roja más) y sería de 12/17 (hay ahora 12 bolillas rojas, y 17 bolillas en total); por lo tanto, 11/16 es menor que 12/17.

Claro está que para que este razonamiento resulte espontáneo es condición necesaria estar familiarizado con las fracciones como expresión de probabilidades.

En el ítem que se incluye a continuación se apela a este aspecto de la noción de fracción:

En una bolsa hay dos fichas rojas y tres fichas verdes. ¿Con cuál de las siguientes acciones se consigue duplicar la probabilidad de extraer, sin mirar, una ficha roja?

• Agregando a la bolsa otras dos fichas rojas y conservando las tres fichas verdes. ☐ 1
• Sacando de la bolsa dos fichas verdes y conservando las dos fichas rojas. ☐ 2
• Agregando a la bolsa dos fichas rojas y quitando dos fichas verdes. ☐ 3
• Con ninguna de las acciones anteriores. ☐ 4

¿Cómo se relaciona la multiplicidad de significados del concepto de fracción con la secuenciación de contenidos en la escuela que pretendemos ejemplificar?

Es frecuente que las fracciones se enseñen a lo largo de casi todos los cursos de la Educación General Básica, y que casi siempre se las presente como partes de un todo (generalmente, como subáreas de una región unitaria, a partir de las tradicionales tortas, pizzas y tabletas de chocolate).

Como consecuencia, los alumnos desarrollan una visión sesgada e incompleta de lo que es una fracción; además, se corre el riesgo de que esa visión no sea la que permite una mejor comprensión del concepto por parte de todos ellos.

Si se toman en cuenta los diversos significados del concepto de fracción, es posible distribuirlos en una secuencia institucional racional, en la que año tras año se vuelva sobre el concepto, pero en espiral, desde perspectivas diferentes, enriqueciéndolo, complejizándolo, complementando aportes y miradas, evitando redundar necesariamente en el mismo aspecto y descuidar los otros aspectos (cayendo, sin intenciones de hacerlo, en una suerte de "más de lo mismo, y de lo demás, nada").
En síntesis: revisar institucionalmente la secuenciación de los contenidos del área puede contribuir a articular y capitalizar esfuerzos a partir de reasignar responsabilidades en el tratamiento de dichos contenidos.

(Un ejemplo similar al de las fracciones, a propósito del concepto de suma, fue presentado en los apartados "Segundo mito" y "Recapitulando: ¿Cómo hacer un análisis didáctico?" del Capítulo 1 del Documento 1: Las pruebas de Matemática. Marco referencial. *En el apartado "Primer nudo. Sumar, restar, multiplicar, dividir: el significado de las operaciones básicas" del Documento 2:* Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. Doce nudos para la reflexión, *se incluyen ejemplos relativos a las otras operaciones elementales.)*

Tercera serie de documentos
Edición definitiva
Guía de lectura y orientaciones para el trabajo institucional
Operativo 2001

Director General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires: Mario N. Oporto
Subsecretario de Educación: Alberto Sileoni
Directora de Educación Superior: Graciela Gil
Coordinadora del Programa de Evaluación de la Calidad Educativa: Martha S. Spotti Responsable del texto: Omar Malet

En síntesis:
En primer lugar, procurar que la enseñanza de las fracciones no descuide la construcción de sus múltiples significados (desarrollados en el documento "Guía de lectura de los resultados y orientaciones para el trabajo institucional"):

- Subárea de una región unitaria.
- Subconjunto de un conjunto discreto de objetos.
- Punto de una recta numérica.
- Resultado de una división.
- Herramienta para comparar dos medidas o dos conjuntos.
- Probabilidad.

En particular, la representación de las fracciones como puntos de la recta numérica contribuye a enfatizar su carácter de números, y favorece la comparación con otros números.

En segundo lugar, tomar en cuenta que la relación entre el sistema de las fracciones y el de sus desarrollos decimales (por ejemplo, entre 2/5 y 0,4) no es muy distinta de la que existe entre el sistema de numeración romana y el sistema indoarábigo que habitualmente empleamos (por ejemplo, entre XV y 15): en ambos casos, los conceptos subyacentes son los mismos; la diferencia radica en los convenios particulares de notación. En consecuencia, una construcción solidaria de las dos formas de notación (la fraccionaria y la decimal) parece viable y deseable.

Anexo V
El papel de la resolución de problemas en la construcción de conocimientos matemáticos de los tres ciclos de la EGB[46]

En el enfoque para la enseñanza de la matemática en nuestra jurisdicción, se sostiene que la apropiación de conocimientos matemáticos se basa en la resolución de problemas y en la reflexión y discusión acerca de lo realizado.

¿Cómo lograr que el docente se apropie de esta forma de trabajo y la pueda sostener en su trabajo en el aula?

Hace ya varios años que, desde cursos de capacitación, documentos y diseños curriculares, etc., se viene haciendo hincapié en la resolución de problemas como actividad central en el aprendizaje de la matemática. En las prácticas habituales, encontramos maneras muy variadas en las cuales se desarrolla efectivamente una enseñanza basada en la "resolución de problemas". Se hace necesario entonces explicitar qué entendemos nosotros por esto.

En primer término, se piensa en una enseñanza que se pone en marcha a partir de la actividad de resolución de problemas de los alumnos. Hay que aclarar aquí, que no se trata de cualquier problema, sino de aquéllos que hacen funcionar como herramientas de solución a los conocimientos que se desea transmitir.

Por otro lado, se afirma que no basta con la actividad de resolución sino que se necesitan diferentes instancias de explicitaciones, justificaciones, confrontaciones, análisis, establecimiento de conclusiones, de relaciones explícitas con los saberes culturales, etcétera.

Como vemos, no son los problemas en sí mismos los que permiten el avance. Las intervenciones del docente constituyen elementos cruciales para posibilitar los intercambios en la clase (un trabajo autónomo de los alumnos frente a los problemas, interacciones entre los alumnos y entre los alumnos y el docente) como apoyo imprescindible en el avance de los conocimientos.

¿Cómo plasmar una propuesta de enseñanza de los distintos contenidos del tercer ciclo de la EGB que se focalice en la construcción de sentido a partir de la resolución de problemas y no haga hincapié exclusivamente en la destreza en el cálculo y la adquisición de algoritmos y procedimientos?

En la capacitación, se deberá mostrar, a través de la bibliografía propuesta, el análisis de registros de clases o la planificación de actividades para el aula y su desarrollo, la fertilidad, para el aprendizaje de cada temática específica, de un trabajo centrado en la resolución de problemas y reflexión sobre lo realizado. La organización de la clase y el tipo de intervenciones del docente que promuevan esta forma de trabajo deberán ser objeto de reflexión y discusión de los participantes de los cursos.

[46] Documento interno de la Dirección de Currículum y Capacitación Educativa, 2001.

Anexo VI
La resolución de problemas en el área de Matemática[47]

La resolución de problemas se ha convertido en un contenido de alta prioridad porque es, a la vez, un medio para el aprendizaje de conocimientos nuevos y un medio para el desarrollo de estrategias cognitivas.

Por otro lado, no es necesario profundizar sobre la importancia que tiene la resolución de problemas en matemáticas: tanto para enseñar como para aprender, resolver problemas es una herramienta útil.

Para enseñar, porque permite al maestro acercar al alumno hacia el conocimiento nuevo, convirtiéndolo en el verdadero constructor.

Para aprender, porque lo que se obtiene en el marco de un significado -porque tiene sentido y porque es necesario- se aprende y puede ser reutilizado.

Para ser un problema, la actividad que se presenta al alumno requiere de:

- El uso de los conocimientos previos.
- Una resistencia, que muestre que esos conocimientos disponibles son insuficientes o inadecuados.
- Una adecuación o modificación de esos conocimientos previos, que implica la construcción de nuevos conocimientos.

Una generalización de esos conocimientos nuevos, que permitirá la reinversión en la resolución de nuevas situaciones.

Construir el sentido de un conocimiento, implica recorrer toda una serie de pequeñas cuestiones, que deben ser tenidas en cuenta al momento de trabajar en el aula.

Para construir el sentido de un conocimiento, es necesario que el alumno reconozca:

- Las situaciones que ese conocimiento resuelve.
- Las situaciones que ese conocimiento no resuelve.
- La economía que ese conocimiento permite.

[47] Documento interno de la Dirección de Currículum y Capacitación Educativa, 2001.

- Los errores que ese conocimiento evita.

- Los casos particulares y las excepciones.

- Las relaciones con otros conocimientos, tanto lineales como de inclusión.

Lo anterior muestra que trabajar un problema no es suficiente para que el alumno construya un conocimiento. De hecho, construirá el conocimiento acercándose cada vez más a él. Será necesario que se le ofrezcan nuevas oportunidades de abordar ese conocimiento de tal manera que pueda acercarse desde sus diferentes perspectivas. Es necesario que descubra situaciones en las que el contenido es útil y situaciones en las que no lo es; situaciones en las que genera errores y situaciones en las que los evita; situaciones en las que economiza; situaciones en las que ese contenido no es el acceso expreso a la solución, pero es un escalón necesario para alcanzarla.

Durante este proceso la actividad del docente es de orientación, supervisión y acompañamiento a las tareas desarrolladas por los alumnos. En el marco de esta tarea es muy importante que el docente motive a sus alumnos a aprender de los errores. Todo este planteo supone una actividad incesante de los alumnos, participación permanente, consultas al docente.

Nos encontramos así con que hay más contenido en el aprendizaje del contenido que en el contenido mismo, ya que a través de este mecanismo los alumnos pueden resolver no tan sólo problemas ligados a una cuestión específica sino que se están preparando para poder enfrentarse con otros que se les presentarán, adoptando una actitud crítica y protagónica. Al docente, poner el acento en las estrategias cognitivas le posibilita un acercamiento mayor a los alumnos, despertar en ellos la motivación, alcanzar mejores resultados en el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Anexo VII
Las fracciones y los decimales[48]

Las fracciones

> Paula y sus amigas viajan desde "Las Toscas" hacia "Ciudad Feliz".
> Ya han recorrido 40 km. Les quedan aún por hacer 3/5 partes del camino.
> ¿Cuál es la distancia entre "Las Toscas" hacia "Ciudad Feliz"?
>
> a. 24 km
> b. 60 km
> c. 100 km
> d. Los datos son insuficientes para averiguarlo.

Este ítem pertenece al eje Números y Operaciones y a la dimensión Procesos cognitivos. Es uno de los ítem del eje que recibió menor porcentaje de respuestas correctas: opta por la respuesta correcta *(opción c)* sólo el 20,1 % de los alumnos, mientras que un porcentaje mayor, el 34,8 %, se inclina por el *distractor b*, y otro porcentaje también mayor, el 24,7 %, lo hace por el *distractor d;* el *distractor a* atrae al 17,7 % de los alumnos.

El ítem evalúa si los alumnos son capaces de reconstruir una cantidad conociendo una parte de la misma y la fracción que representa a la otra parte –en el contexto de una situación cotidiana–. Se trata de averiguar la distancia entre "Las Toscas" y "Ciudad Feliz": ésta es la cantidad que hay que reconstruir.

Los datos con que se cuenta son:

- Una parte de esa cantidad (los 40 km ya recorridos).
- La fracción que representa a la otra parte (el camino que queda por recorrer); esta fracción, 3/5, expresa el complemento de la parte dato (los 40 km) con respecto a la cantidad total.

¿Cómo razonan, probablemente, los alumnos que eligen cada distractor? ¿Qué hacer en el aula respecto de estos razonamientos incorrectos?

Quienes optan por *b,* el distractor más fuerte, parecen responder a la pregunta "¿Cuál es la distancia que a Paula y sus amigas les falta recorrer para llegar a Ciudad Feliz?". Es decir, calculan correctamente "la otra parte" o el complemento de la distancia ya recorrida.

Para prevenir este tipo de errores, vale la pena trabajar, en el aula, en la adecuada caracterización de la incógnita y de la respuesta, como condición previa al proceso de cálculo; que los alumnos

[48] Tomado de Malet, O. y otros: *Orientaciones para interpretar los resultados y tomar decisiones institucionales,* La Plata, DGCyE, 2001.

puedan identificar con claridad cuál es la incógnita por la que se pide, que puedan reconocer de antemano con qué se da respuesta al problema, es tan importante como que puedan actuar en el terreno del cálculo efectivo (o lo es más, porque es condición necesaria para que el cálculo tenga sentido).

Quienes optan por la *opción d,* y consideran que los datos son insuficientes para averiguar la distancia entre "Las Toscas" y "Ciudad Feliz", quizá lleguen a esa conclusión al advertir que no es posible calcular dicha distancia haciendo una única operación elemental entre los números 40 y 3/5. En efecto, la respuesta no es directa e inmediata, y su búsqueda requiere cálculos intermedios.

Quienes optan por *a,* calculan 3/5 de 40. Esta elección (y otras similares, observadas en sucesivas aplicaciones de las pruebas) sugiere que algunos alumnos tienden a hacer intervenir los datos numéricos de los enunciados en cálculos directos y sencillos, sin considerar el significado de esos datos, ni sus interrelaciones ni su relación con la incógnita.

En síntesis, la opción por cualquiera de los tres distractores puede estar fuertemente condicionada por el peso y el prestigio que el cálculo tiene en el ámbito escolar. Como consecuencia de esa sobrevaloración, el alumno puede estar tan preocupado por "hacer las cuentas", que descuida el análisis de qué es lo que se le pide (en cuyo caso incurre en errores como los que releva el *distractor b),* o bien abandona fácilmente los intentos de articular los datos disponibles para producir la respuesta cuando ésta no es inmediata (en cuyo caso comete errores del tipo de los que refleja el *distractor d).*

Es más, el énfasis en el cálculo por el cálculo mismo puede traer consecuencias extremas como la de que el alumno priorice el hacer una cuenta cualquiera por sobre el reflexionar acerca de cuál es la cuenta que tiene sentido hacer (tal como quizá les ocurra a quienes escogen el *distractor a).*

(En el documento "Las pruebas de Matemática. Marco referencial" hemos hecho referencia al predominio distorsivo del cálculo en el Área de la Matemática, y a la importancia de que los alumnos anticipen bajo qué condiciones –llegando hasta dónde, averiguando qué– un problema quedará resuelto.)

Los decimales

Otro ítem utilizado en las pruebas de evaluación de la calidad:

> ¿Cuál de los siguientes pares de números está entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{10}$?
>
> a. 2,6 y 7,9
> b. 0,5 y 0,6
> c. 0,3 y 0,8
> d. 0,2 y 0,6

El ítem que comentamos corresponde al eje Números y Operaciones y a la dimensión Procedimientos de Trabajo, y es el que recibió menor porcentaje de respuestas correctas entre los ítem del eje. Evalúa si los alumnos son capaces de reconocer números decimales que cumplen con la condición de estar comprendidos entre dos fracciones, por lo que requiere acotar y encuadrar números decimales con fracciones (procedimientos que ponen en juego relaciones tales como "es mayor que", "es menor que", "está entre... y...").

Sólo el 19 % de los alumnos selecciona la respuesta correcta *(opción b).* En cambio, el 52,7 % escoge el *distractor a.* El 14,7 % opta por *c* y el 9,8 % lo hace por *d.*

Detengámonos en el *distractor a*: ¿Cuál es su lógica? ¿Por qué atrae a más de la mitad de los alumnos?

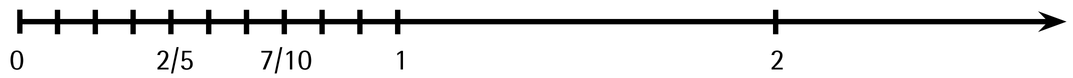
Es altamente probable que quienes lo eligen conviertan las fracciones dato a números decimales procediendo erróneamente como si la línea de fracción equivaliera a la coma decimal; de esta manera, la fracción 2/5 es convertida en el número decimal 2,5, y la fracción 7/10 es convertida en el número decimal 7,10. La pregunta del ítem se transforma, entonces, en "¿Cuál de los siguientes pares de números está entre 2,5 y 7,10?" Obviamente, el primer número del par que propone el *distractor a,* o sea, 2,6, está entre 2,5 y 7,10 (es simultáneamente mayor que 2,5 y menor que 7,10).

¿Qué ocurre con 7,9, el otro número del par? Interviene ahora un segundo error consistente en interpretar la parte decimal de 7,10, o sea, diez centésimos, como diez décimos, lo que conduce a creer que 7,9 (siete enteros y nueve décimos) es menor que 7,10 (siete enteros y diez décimos); aceptando esta premisa, también 7,9 está entre 2,5 y 7,10.

¿Cómo actuar didácticamente ante estos errores? Dos ideas se presentan como claves:

- En primer lugar, procurar que la enseñanza de las fracciones no descuide la construcción de sus múltiples significados (desarrollados en el documento "Guía de lectura de los resultados y orientaciones para el trabajo institucional"):
  - Subárea de una región unitaria.
  - Subconjunto de un conjunto discreto de objetos.
  - Punto de una recta numérica.
  - Resultado de una división.
  - Herramienta para comparar dos medidas o dos conjuntos.
  - Probabilidad.

En particular, la representación de las fracciones como puntos de la recta numérica contribuye a enfatizar su carácter de números, y favorece la comparación con otros números. En el ejemplo que nos ocupa, quien logre visualizar a las fracciones 2/5 y 7/10 como puntos de la recta numérica, no se va a dejar tentar por el *distractor a* del ítem:



- En segundo lugar, tomar en cuenta que la relación entre el sistema de las fracciones y el de sus desarrollos decimales (por ejemplo, entre 2/5 y 0,4) no es muy distinta de la que existe entre el sistema de numeración romana y el sistema indoarábigo que habitualmente empleamos (por ejemplo, entre XV y 15): en ambos casos, los conceptos subyacentes son los mismos; la diferencia radica en los convenios particulares de notación. En consecuencia, una construcción solidaria de las dos formas de notación (la fraccionaria y la decimal) parece viable y deseable.

Anexo VIII
Las dimensiones de los contenidos [49]

Las dimensiones consideradas representan los aportes que la enseñanza de la matemática proporciona (o debería proporcionar) a la formación de los educandos en los niveles básicos de educación.

El propósito de contemplar estas dimensiones es garantizar que se reflejen las tendencias innovadoras que el currículum del área propone.

Las dimensiones son:

- *Estructuras conceptuales*, o sea, datos, hechos, conceptos y redes de conceptos matemáticos.
- *Procesos cognitivos,* o sea, procesos de razonamiento matemático y comunicación en lenguajes matemáticos.
- *Procedimientos de trabajo,* o sea, técnicas y estrategias del quehacer matemático.
- *Componentes actitudinales*, apunta a los intereses, las actitudes, los valores, las formas de comportamiento y de interacción con el medio, que es posible promover o fortalecer desde el área de matemática.

Caracterización del significado y los alcances de cada una de las tres primeras dimensiones:

1. *Estructuras conceptuales:* hace referencia a los datos/hechos, los conceptos y las redes de conceptos matemáticos que los alumnos deben construir y deben disponer:

a. Los *datos* o *hechos* son unidades de información e incluyen términos, notaciones, convenciones y resultados.
Los *términos* son las denominaciones con las que se designan los conceptos o sus relaciones. Por ejemplo: "triángulo" o "teorema de Pitágoras".
Las *notaciones* son los signos empleados para expresar una idea de modo breve y preciso. Por ejemplo: "(x + y): 2" expresa que al valor de x se le suma el de y, y a la suma se la divide por 2.
Las *convenciones* son los acuerdos consensuados para comunicar información sin ambigüedad y evitando largos rodeos y explicaciones. Por ejemplo: "En la recta numérica, los números negativos se ubican a la izquierda de cero, y los positivos, a la derecha".
Los *resultados* son unidades de información, producto directo e inmediato de relaciones entre términos, susceptibles de memorizar, cuyo dominio y control permite trabajar sin tener que partir siempre de cero. Por ejemplo: las "tablas de multiplicar".

[49] "Revisando mitos. Qué cambiar en el área de matemática", en *Documento del Programa de Evaluación de la Calidad de la Provincia de Buenos Aires*, La Plata, DGCyE, 2001.

b. Los *conceptos* describen una regularidad. Por ejemplo, el concepto de "cuadrado" describe las características comunes a todos los cuadrados.
Los conceptos nos liberan de la esclavitud de lo particular, nos permiten organizar la realidad y predecirla; si no fuera por ellos, cada objeto sería una realidad nueva, diferente e imprevisible. El conocimiento conceptual tiene como propósito organizar los elementos de nuestra vida.

Un concepto exige una definición formal, sea por comprensión (cuando se enuncian las condiciones que lo definen; por ejemplo, "número (natural) par es aquel que presenta resto cero cuando se lo divide por 2") o por extensión (cuando se enumeran todos los miembros de la clase que lo constituye; por ejemplo: "número (natural) par es uno de los elementos de la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12,...").

c. En cuanto a las *redes de conceptos,* recordemos que los conceptos no son elementos aislados, sino que están relacionados con otros conceptos (fundamentalmente, por inclusión o por analogía), conformando redes conceptuales; es más: el significado de un concepto proviene en gran medida de su relación con los otros conceptos de la red de la que participa. Piénsese, por ejemplo, en la red clasificatoria de los cuadriláteros, que permite comprender el concepto de cuadrado en relación con los conceptos de rectángulo y rombo, entre otros (el cuadrado es a la vez rectángulo y rombo, ya que tiene sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados de la misma longitud).[50]

2. *Procesos cognitivos:* esta dimensión hace referencia a los procesos de razonamiento matemático y a la comunicación en lenguajes matemáticos.

a. El *razonamiento matemático* es una secuencia argumental por medio de la cual se expresa la capacidad para establecer nuevas relaciones entre conceptos matemáticos. Es la forma usual de procesar conceptos, de derivar unos conceptos de otros, de implicar una nueva relación sobre la base de relaciones ya establecidas. Es un modo particular de pensar que consiste en hacer inferencias, es decir, en completar información parcial obteniendo conclusiones a partir de premisas. Puede asumir dos formas: *razonamiento deductivo* y *razonamiento inductivo.*
El *razonamiento deductivo* es el que prevalece en matemática; no obstante, el razonamiento inductivo también tiene lugar en esta ciencia (sobre todo, cuando se la enseña y aprende en los niveles básicos del sistema educativo). El razonamiento deductivo (o deducción) requiere que sus premisas ofrezcan fundamentos seguros para su conclusión: ésta se desprende de aquéllas con absoluta necesidad, y tal necesidad no es cuestión de grado ni depende de otros factores (por ejemplo, agregar más premisas no hace que el razonamiento se vuelva más válido).
Consideremos la siguiente deducción:

- Todos los múltiplos de 12 son múltiplos de 6
- Todos los múltiplos de 6 son múltiplos de 2
- Por lo tanto, todos los múltiplos de 12 son múltiplos de 2

Las dos premisas garantizan la conclusión; introducir otra premisa (por ejemplo: todos los múltiplos de 12 son múltiplos de 4) no refuerza la validez del razonamiento.
A diferencia del razonamiento deductivo, el *razonamiento inductivo* (o inducción) no requiere que sus premisas ofrezcan fundamentos concluyentes para la verdad de su conclusión, sino que ofrezcan algún fundamento: ésta se desprende de aquéllas con cierta probabilidad, y tal probabilidad es cuestión de grado y depende de otros factores (por

[50] Cuando se evalúa la dimensión Estructuras conceptuales pareciera tener más características en común con los ejercicios tradicionales que con las situaciones problemáticas, porque apelan de modo directo a la memoria del alumno. Sin embargo, estas cualidades no necesariamente se traducen en grados de dificultad bajos; es fundamental tener en cuenta que un concepto o una propiedad son (deberían ser) el producto final de un proceso de construcción protagonizado por el alumno –proceso solidario con procesos cognitivos y procedimientos de trabajo–, y que la memoria no sustituye ese proceso constructivo: sólo garantiza la disponibilidad del concepto o de la propiedad en cuestión una vez que fueron construidos.

ejemplo, agregar más premisas puede debilitar o reforzar el razonamiento).

Consideremos la siguiente inducción:

– A través de cierta correspondencia, a *2* le corresponde *5*
– En consecuencia, es probable que a *10* le corresponda *29* (porque así como $3 \,.\, 2 - 1 = 5$, tenemos $3 \,.\, 10 - 1 = 29$)
– Pero también es probable que a *10* le corresponda *61* (porque así como $2^2 - 5 \,.\, 2 + 11 = 5$, tenemos $10^2 - 5 \,.\, 10 + 11 = 61$)
– Y aun es probable que a *10* le corresponda *13* (porque así como $2 + 3 = 5$, tenemos $10 + 3 = 13$), etc.

La premisa no garantiza la conclusión; introducir otra premisa (por ejemplo, a *4* le corresponde 7) puede modificar la conclusión (con la introducción de la nueva premisa, de las tres conclusiones anteriores, sólo quedan en pie las dos últimas: la primera es insostenible ya que $3 \,.\, 4 - 1$ no da 7; en cambio, $4^2 - 5 \,.\, 4 + 11$ sí da 7, al igual que $4 + 3$); introducir una tercera premisa (por ejemplo, a *5* le corresponde 8) puede volver a modificar la conclusión (inclinando la balanza hacia la que sostiene que a 10 le corresponde 13).

b. Con respecto a la *comunicación en lenguajes matemáticos*, la matemática tiene una notación y una sintaxis que le son propias, y que han contribuido de modo decisivo a su desarrollo como ciencia (hasta tal punto que algunos autores definen a la matemática misma como un lenguaje).

Los tres lenguajes básicos de la matemática son:

– El *lenguaje aritmético* (que incluye los signos a través de los cuales escribimos los números y expresamos las operaciones entre ellos)
– El *lenguaje algebraico* (que incluye los signos por medio de los cuales expresamos incógnitas y variables, y operaciones entre ellas)
– El *lenguaje geométrico y gráfico* (que incluye los dibujos a través de los cuales representamos las relaciones, las figuras geométricas y la información estadística)

Estos tres lenguajes interactúan con el lenguaje habitual u ordinario, a través de un juego múltiple de traducciones posibles. Traducir es cambiar de código manteniendo idénticos los significados matemáticos.

3. *Procedimientos de trabajo:* esta dimensión hace referencia a técnicas y estrategias de trabajo propias del quehacer matemático (aunque no necesariamente exclusivas de este quehacer) que sirven para procesar información.

¿Qué es un *procedimiento*? Un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a alcanzar una meta; es decir, una forma de actuación o de ejecución de una tarea.

El conocimiento *procedimental* tiene por objetivo prioritario ejecutar acciones sobre los elementos de nuestra vida con el propósito de transformarlos; para ello, relaciona linealmente acciones sobre datos/hechos o sobre conceptos.

Poner en juego un procedimiento requiere:

- Conocerlo, evocarlo, recordarlo
- Contextualizarlo, ajustarlo a la particular situación que se procura resolver
- Componer las acciones de que consta, articularlas, integrarlas
- Ejecutar el procedimiento con grados de precisión y de automaticidad que varían según la situación de que se trate
- Generalizar un procedimiento ya conocido, extendiéndolo a una situación nueva afín a aquellas situaciones que el procedimiento permitió resolver en el pasado, pero no idéntica a ellas.

a. Las *técnicas* (o destrezas) se ejecutan procesando básicamente datos o hechos.

Por ejemplo, se usa una técnica cuando se calcula la diferencia entre 90º y 35º 27' 46"
de la siguiente manera:

89º 59' 60"

35º 27′ 46″
54º 32′ 14″
En este caso, el procedimiento actúa sobre los dos datos (90º y 35º 27′ 46″) para producir el resultado (54º 32′ 14″).

Las técnicas son *algorítmicas* porque especifican de forma muy precisa la secuencia de acciones y decisiones a respetar para resolver una situación. Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza en un número finito de etapas a cierto resultado, con independencia de los datos. Si la ejecución de un algoritmo es completa y ordenada, se llega con seguridad a la solución. Todos los que lo ejecutan se comportan de la misma manera en el camino hacia la solución. Es el caso de los mecanismos de cálculo tradicionales para *sumar, restar, multiplicar y dividir.*

b. Las *estrategias* se ejecutan procesando básicamente conceptos y relaciones entre conceptos.
Por ejemplo, se usa una estrategia cuando se aproxima 12 metros 689 milímetros al decímetro más cercano pensando de la siguiente manera: 100 milímetros equivalen a 1 decímetro; la longitud dato tiene más de 12 metros 600 milímetros (o 12 metros 6 decímetros) y menos de 12 metros 700 milímetros (o 12 metros 7 decímetros); por lo tanto, está entre 12 metros 6 decímetros y 12 metros 7 decímetros; más precisamente: la longitud dato tiene 89 milímetros más que 600 milímetros (o 6 decímetros) y 11 milímetros menos que 700 milímetros (o 7 decímetros), por lo que está más cerca de 12 metros 7 decímetros que de 12 metros 6 decímetros. Por lo tanto, 12 metros 689 milímetros aproximados al decímetro más cercano son 12 metros 7 decímetros.
En la ejecución de la aproximación intervienen:
- la relación de equivalencia entre unidades de longitud de distinto orden ("100 milímetros equivalen a 1 decímetro")
- la relación de orden entre longitudes que subyace al encuadramiento de la longitud dato ("la longitud dato está entre 12 metros 600 milímetros y 12 metros 700 milímetros") - el concepto de distancia entre dos longitudes ("la distancia entre la longitud dato y 12 metros 600 milímetros es de 89 milímetros").

Las estrategias son *heurísticas* ya que sólo orientan de manera general en la secuencia a respetar y no estipulan completamente cómo actuar. Su utilización no siempre permite prever un resultado concreto o una manera determinada de obrar por parte del ejecutor. Los heurísticos suponen un mayor dominio conceptual que los algoritmos, y un alto grado de reflexión, creatividad e imaginación. Su importancia se pone de manifiesto si se considera que es imposible construir, enseñar y aprender algoritmos para todos los problemas matemáticos que pueden presentarse en la vida y en la escuela... Son heurísticos los procedimientos informales de cálculo mental.

Ejemplos:
– procedimientos destinados a procesar cuantitativamente la información matemática o matematizable (calcular; medir; estimar; acotar; aproximar; leer cuantitativamente gráficos y tablas);
– procedimientos destinados a procesar cualitativamente la información matemática o matematizable (qué datos se requieren para averiguar una incógnita, y qué incógnitas se pueden averiguar con los datos de que se dispone; evaluar diseños, construcciones y representaciones geométricas y espaciales en función de una meta; leer cualitativamente gráficos y tablas).

Las situaciones didácticas en general apuntan a las distintas dimensiones y requieren que el alumno ponga en juego una competencia básica: la de *resolver.*

Resolver es encontrar una vía que conduzca a la solución de un ejercicio o problema matemático.

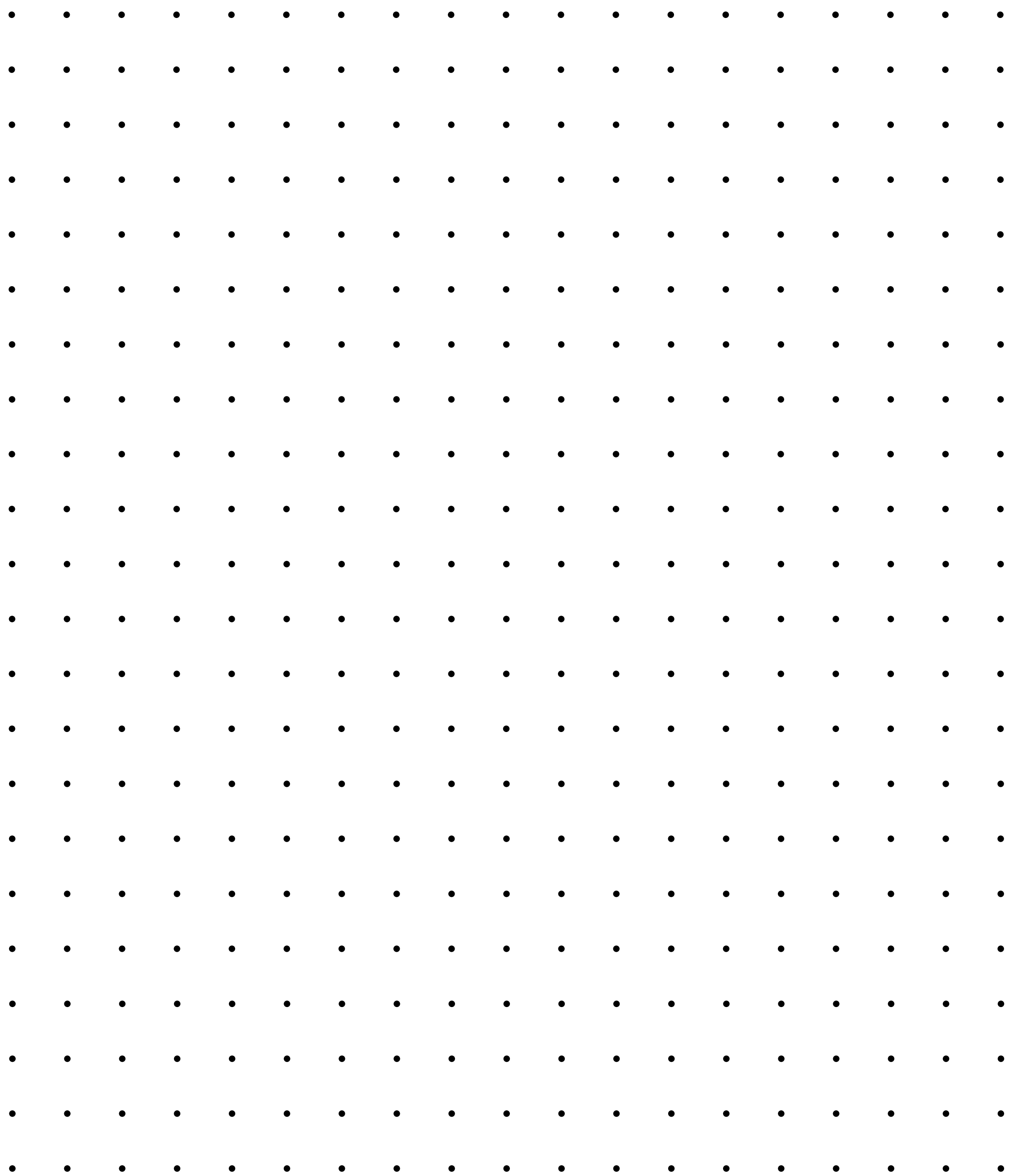
Esa vía puede consistir en resignificar un concepto o una propiedad, en establecer una relación, en efectuar una traducción, en ejecutar un procedimiento, etc.; es, siempre, un recurso a alguna de las tres dimensiones consideradas (o a más de una, pero con un nítido predominio de una por sobre las otras; la dimensión predominante es la que orienta la inscripción de la situación en la trama de dimensiones definida).

Otra competencia básica: la de *modelizar.*

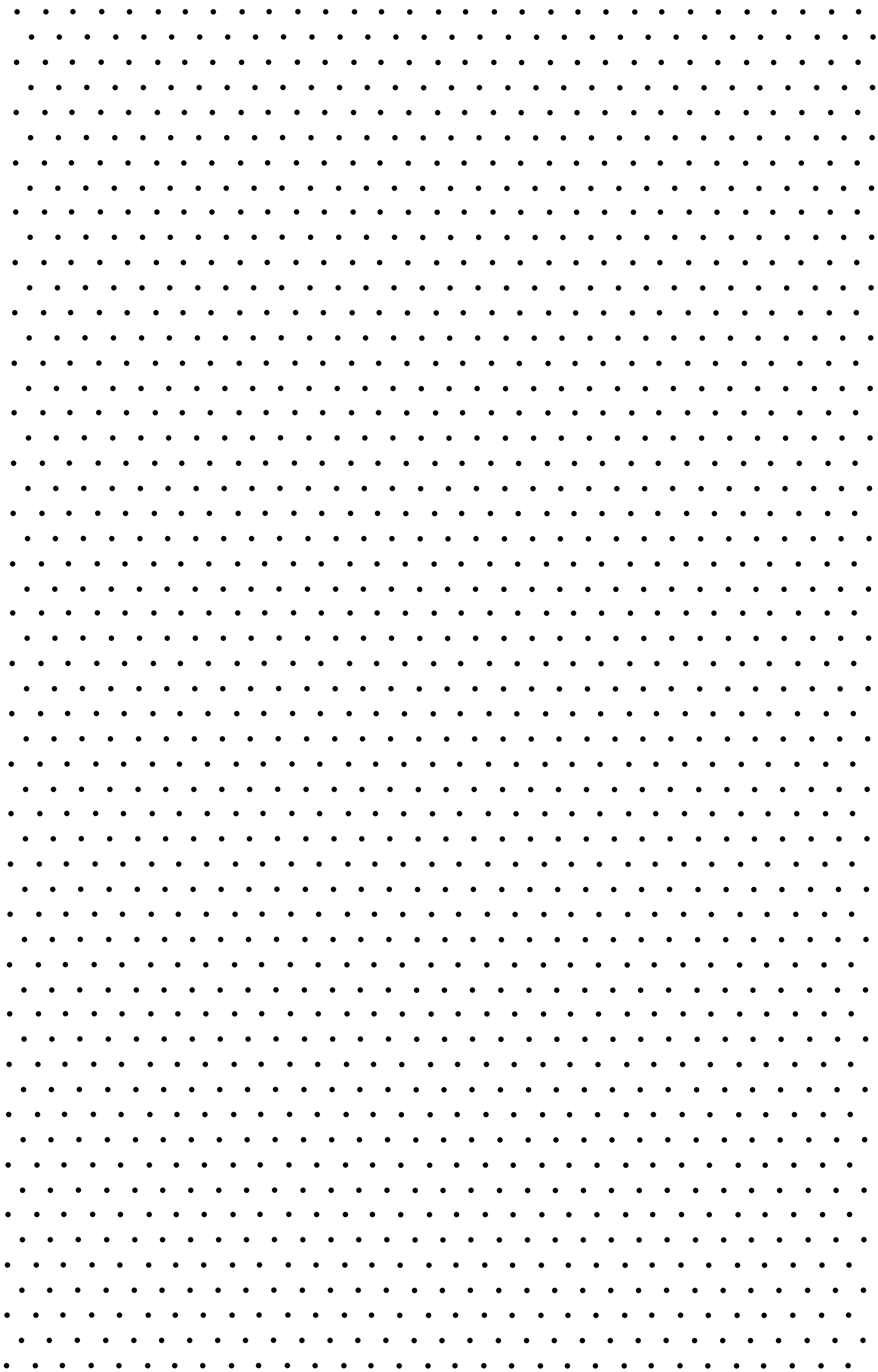
Modelizar es asociar a un objeto no matemático (por ejemplo, a una situación de la vida cotidiana) un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características del objeto no matemático (por ejemplo, una relación de proporcionalidad). Si bien no todos los ítem exigen que el alumno modele matemáticamente una situación, son muchos los que lo requieren, ya que la capacidad para seleccionar y adaptar modelos matemáticos a situaciones concretas es de enorme importancia y valor en el contexto de la Educación General Básica.

Anexo IX
La trama cuadrangular y la trama triangular

Trama cuadrangular



Trama triangular



Bibliografía

Broitman, C., *Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*, Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas, 1999.

Charnay, R., "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra, C. y Saiz, I. (comp.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, 1994 .

Chemello, G., "La matemática y su didáctica. Nuevos y antiguos debates", en Iaies, G. (comp.), *Didácticas especiales. Estado del debate*, Buenos Aires, Aique, 1992.

Collette, J.P., *Historia de las matemáticas I y I1,* Madrid, Siglo XXI, 1985.

Documento nº 1, *Algunas reflexiones acerca de la enseñanza de la matemática en el Primer Ciclo*, Dirección de Educación Primaria, provincia de Buenos Aires, 1999.

Documento nº 2, *Orientaciones didácticas sobre la enseñanza de la división en EGB.* Gabinete pedagógico curricular. Dirección de Educación Primaria, provincia de Buenos Aires, 2001.

Documento nº 3, *Orientaciones didácticas sobre la enseñanza de la multiplicación en EGB.* Gabinete pedagógico curricular. Dirección de Educación Primaria, provincia de Buenos Aires, 2001.

Documento nº 4, *Orientaciones didácticas sobre la enseñanza del sistema de numeración*, Gabinete pedagógico curricular. Dirección de Educación Primaria, provincia de Buenos Aires, 2001.

Documento nº 5, *Orientaciones didácticas sobre la enseñanza de la geometría*, Gabinete pedagógico curricular. Dirección de Educación Primaria, provincia de Buenos Aires, 2001.

DGCyE de la Provincia de Buenos Aires, Consejo General de Cultura y Educación, *Diseño Curricular* (Resolución 13.271), 1999.

DGCyE, Programa de Evaluación de la Calidad, *Documentos definitivos*, La Plata, 2004.

Duckworth, E., *Cómo tener ideas maravillosas,* Madrid, Visor, 1987.

Gálvez, G., "La didáctica de la matemática", Cap. II, en Parra, C. y Saiz, I. (comp.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, 1994.

Kline, M., *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, México, Siglo XXI, 1985.

Kopitowsky, A., *Enseñanza de la matemática. Entre el discurso y la práctica,* Buenos Aires, Aique, 1999.

Lerner, D., *La matemática en la escuela aquí y ahora*, Buenos Aires, Aique, 1992.

Lerner, D., Sadovsky, P. y Wolman, S., "El sistema de numeración: un problema didáctico", en Parra, C. y Saiz, I. (comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós, 1994.

Lerner, D., "La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición", en Castorina, J.A., Ferreiro, E., Kohl de Oliveira, M. y Lerberm, D., *Piaget- Vygotski: contribuciones para replantear el debate*, Buenos Aires, Paidós, 1996.

Panizza, M. (comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Paidós, 2003.

Parra, C., "El cálculo mental en la escuela primaria", en Parra, C. y Saiz, I. (comp.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, 1994.

Parra, C., "Las poderosas reflexiones de los chicos" en Iaies, G. *Los CBC y la enseñanza de la matemática*, Buenos Aires, A-Z editora, 1997.

Parra, C., Sadovsky, P. y Saiz, I., *Matemática y su enseñanza,* Documento curricular, Buenos Aires, Programa de transformación de la formación docente, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, 1994 .

Ponce, H. O., *Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo*, Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas, 2000.

Pujadas, M. y Eguiluz, L., *Fracciones ¿un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula*, Buenos Aires, Ediciones Novedades Educativas, 2000.

Revista Uno. *Didáctica de la enseñanza de la matemática*, Barcelona, Grao, 1994–2001.

Rey Pastor, J. y Babini, J., *Historia de la matemática*, Madrid, Gedisa, 1985.

Sadovsky, P., "Pensar la matemática en la escuela", en Poggi, M. (comp..), *Apuntes y aportes para la gestión curricular,* Buenos Aires, Kapelusz, 1995.

Saiz, I., "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir", en Parra, C. y Saiz, I. (comp.): *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, 1994.

Saiz, I., "III. Resolución de problemas", en *Fuentes para la transformación curricular*, Buenos Aires, MCyEN, 1996.

Vera, F., *Breve historia de la geometría*, Buenos Aires, Losada, 1948.

Vergnaud, G. y Ricco, G., *Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos,* Buenos Aires, Revista Argentina de Educación, nº 6, 1985.

Wolman, S., "La enseñanza de los números en el nivel inicial y en el primer año de la EGB", en Castedo, M., Molinari, M. y Wolman, S., *Letras y números*, Buenos Aires, Santillana, 2000.