Propuestas para la enseñanza de Matemática en 3er año del nivel polimodal

–Ciclo lectivo 2003–

Documento de apoyo N°1

Dirección de Educación Polimodal y Trayectos Técnico-Profesionales
Material destinado a docentes de Matemática del nivel polimodal

Dirección General de
Cultura y Educación
Gobierno de la Provincia
de Buenos Aires

Subsecretaría de Educación

Índice

Propuesta realizada por docentes de las siguientes instituciones

Universidad Nacional de La Plata
Universidad Nacional de Luján
Universidad Nacional de San Martín
Universidad Nacional Mar del Plata
Universidad Nacional de La Matanza
Universidad Nacional de General Sarmiento
Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Universidad Tecnológica Nacional
Dirección de Educación Superior
Dirección Provincial de Educación de Gestión Privada
Dirección de Educación Polimodal y Trayectos Técnico-Profesionales

Marzo de 2003

Propuestas para la enseñanza de Matemática en 3er año del nivel polimodal

–Ciclo lectivo 2003–

Introducción

¿En qué consiste verdaderamente la matemática? ¿*Axiomas* (como el postulado de las paralelas)? ¿*Teoremas* (como el teorema fundamental del álgebra)? ¿*Demostraciones* (como la demostración de indecibilidad del Godel)? ¿*Conceptos* (como conjuntos y clases)? ¿*Definiciones* (como la definición de dimensión de Menger)? ¿*Teorías* (como la teoría de categorías)? ¿*Fórmulas* (como la fórmula de la integral de Cauchy)? ¿*Métodos* (como el método de aproximaciones sucesivas)?
Seguramente, la matemática no podría existir sin estos ingredientes; todos le son esenciales. Sin embargo, es una opinión defendible, que ninguno de ellos está en el corazón del tema, que la razón principal de la existencia de un matemático es la solución de problemas, y que, por lo tanto, de lo que verdaderamente consta la matemática es de problemas y soluciones.

Teoría intuitiva de conjuntos. Raúl Halmos

Fundamentación de la propuesta curricular

La discusión respecto del abordaje de la matemática en la escuela se organiza como una oposición entre dos polos fundamentales: **matemática pura** versus **matemática aplicada**.

La matemática pura es el estudio y desarrollo por el conocimiento mismo de la ciencia, sin importar a que otros propósitos, diferentes de sí misma, pueda servir.

El estudio de la matemática aplicada en cambio sí pone el énfasis en su posterior utilidad como herramienta para el estudio de otras disciplinas, como la física, química, biología, ciencias de la ingeniería, la tecnología, la computación, etc.

Si se reflexiona sobre el valor pedagógico de la enseñanza de la matemática, se puede afirmar que el desarrollo de la matemática pura forma al estudiante en el arte del razonamiento puro, el método deductivo o inductivo-deductivo, con un alto poder de abstracción. Si en cambio se enfoca el estudio de la matemática en cuanto a su aplicación a otras disciplinas, a la transferencia de conocimientos para resolver problemas en otros campos, a utilizarla como herramienta, se puede valorar por un lado su aplicabilidad, por otro el desarrollo de habilidades para resolver problemas, para explicar fenómenos con la matemática como herramienta.

Es un hecho que no puede existir la matemática aplicada si no hay detrás el estudio de una matemática pura. Existen múltiples ejemplos dónde los desarrollos en matemática pura se traducen en matemáticas aplicadas, como el estudio hecho por los griegos de las cónicas en forma pura, que 2000 años después tuvo una aplicación práctica, al permitirle a Kepler describir las órbitas de los planetas. O el desarrollo del análisis matemático de Newton y Leibniz que tuvo múltiples aplicaciones en otras ramas de las ciencias.

Hay dos aspectos muy importantes a tener en cuenta para la elaboración del currículum. Uno es la ***didáctica*** y otro es el de los ***contenidos.***

Al definir cuál será la didáctica de la enseñanza de la matemática del espacio curricular para Tercer Año, se debe definir primero con qué fin se imparte, para qué, quienes la van a estudiar, cuáles son sus conocimientos previos y cuáles sus intereses, cuál es el estado de arte de la matemática en el mundo, cuáles son los requerimientos de otras disciplinas y cuáles los del mundo del trabajo, qué conocimientos y habilidades pide la Universidad. Una alternativa sería continuar trabajando con la misma estructura clásica (explicación, ejemplo, ejercicios, problemas, evaluación). Para el espacio curricular de Matemática en tercer año se puede rever esa metodología Se cuenta con muchas nuevas herramientas disponibles para agilizar, modernizar y hacer más atractivas las clases, logrando mejores resultados.

Se propone entonces una fuerte mirada sobre la innovación metodológica, centrando el eje fundamentalmente en la aplicabilidad de los contenidos ya vistos en los espacios curriculares de primer y segundo año, y en el desarrollo de las destrezas necesarias para que el alumno pueda abordar un problema, en una modelización de la realidad compleja, discutir y plantear sus datos y transitar el camino hacia la solución. El foco está en el planteo de la situación más que en su solución final.

La propuesta se centra, más que en la incorporación de nuevos contenidos, en la profundización y revisión de los contenidos vistos -seleccionando aquéllos que resulten más importantes- haciendo foco en su aplicación tanto a los otros espacios curriculares como a situaciones concretas del mundo del trabajo y del entorno cotidiano del alumno.

Expectativas de logro

Se procura con las expectativas propuestas, afianzar las operatorias adquiridas por el alumno en años anteriores, a través de la resolución de problemas, aplicando la metodología al diseño, resolución, comunicación de resultados y análisis de los mismos, a través del uso permanente de modelos matemáticos.

- Desarrollar habilidades y estrategias para el abordaje de situaciones problemáticas.
- Formular situaciones problemáticas.
- Predecir y validar resultados y factibilidad de resolución.
- Diseñar algoritmos y estrategias de resolución de situaciones problemáticas.
- Relacionar la metodología de resolución de problemas con otros espacios curriculares y situaciones de la vida real en función de la orientación elegida.
- Comunicar los resultados obtenidos en forma escrita y oral.

Ejes temáticos fundamentales

Los ejes temáticos se constituyen en prerrequisitos para el abordaje con contenido concreto de las problemáticas propuestas en el aula.

- Conjuntos numéricos: Operaciones y propiedades. Cálculo aproximado y exacto. Técnicas de redondeo y truncamiento, estimación de errores.
- Funciones: Relaciones entre variables, dependencia funcional en una expresión algebraica de dos variables, expresión a través de fórmulas, tablas, gráficos. Función lineal, cuadrática, racional, polinómica, trigonométrica Interpretación de gráficos. Análisis del comportamiento global de funciones y en entornos reducidos.
- Ecuaciones: lineales, cuadráticas. Sistemas de ecuaciones lineales y mixtos.
- Conceptos geométricos básicos: Noción de distancia. Figuras planas: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculo y circunferencia. Cuerpos cubo, prisma recto, cilindro circular recto, pirámide, esfera. Propiedades: Perímetro, Área, Volumen. Semejanza. Ángulos inscritos. Propiedades. Teorema de Pitágoras.
- Trigonometría: Sistema circular de medición de ángulos. Valores de las relaciones trigonométricas de los ángulos fundamentales. Valor exacto y aproximado. Resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos.

Las estrategias metodológicas se proponen llevar al alumno al hacer, descubriendo en la matemática una poderosa herramienta de interpretación de la realidad. El abordaje de situaciones fácticas concretas permite la aplicabilidad de la ciencia no sólo en otros campos del saber -otros espacios curriculares- sino en la complejidad que representa interpretar y manipular la realidad favoreciendo la integración del joven a su entorno social y cultural.

Los contenidos se constituyen en prerrequisitos que no deben ser repasados sino recreados y retomados, en algunos casos, ante la necesidad de un contenido nuevo, éste puede ser introducido desde la problemática en que aparece, para surgir como necesidad de incorporación del mismo.

Enfoque basado en la resolución de situaciones problemáticas: Para ayudar a la interpretación de los aspectos de la realidad en la que el modelo matemático está presente, separar los datos de las incógnitas y favorecer el abordaje de situaciones reales. Las situaciones problemáticas deberán incluir la posibilidad de solución única, así como múltiple solución o carecer de la misma. Se deberán proponer situaciones que se constituyan en un problema para el alumno, que le permitan elaborar nuevas relaciones para abordar su solución y elegir entre diferentes caminos. El punto de partida ha de ser la situación en la que tenga lugar la interacción del alumno con el problema y el producto de la misma el insumo, para la resignificación de los objetos matemáticos. Se deben diseñar secuencias didácticas que favorezcan la construcción por parte del alumno, regulando la intervención docente, seleccionado estrategias que propicien la construcción compartida y determinando nuevos criterios para la evaluación de los aprendizajes.

Planteo de situaciones problemáticas que integren diversos contenidos: Para desarrollar la migración del problema real al modelo matemático sin prejuzgar los contenidos subyacentes en la situación (evitando así el "problema tipo " por ejemplo) y contribuir aún más a la modelización de la realidad compleja y permitiendo afianzar contenidos anteriores y abordar como necesidad contenidos a ser introducidos.

Buceo bibliográfico de diferente nivel de complejidad: Para favorecer la comprensión de la terminología específica del quehacer matemático, pasar del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico y viceversa, y contribuir al aprendizaje independiente cumpliendo el docente el rol de mediador-facilitador del aprendizaje.

Desarrollo de la expresión oral: Para desarrollar la posibilidad de expresar una idea fuerza, una idea síntesis de la producción personal realizada al resolver una situación. También, para contribuir a la construcción de un lenguaje abstracto al fundamentar y argumentar procesos y resultados, para además, utilizar la capacidad de razonar para defender ideas y poder eventualmente modificar los modelos que sustentan determinadas convicciones.

Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas.*

En general la resolución de problemas es una tarea que ofrece a los estudiantes alguna dificultad.

Dividiremos a los problemas en dos grandes grupos: **Problemas de demostración y Problemas de resolución.**

El objetivo de un **problema de demostración** es mostrar, en forma concluyente, que una afirmación enunciada claramente es verdadera o falsa. Son los conocidos teoremas y proposiciones. Sus enunciados están constituidos por dos partes principales: *la hipótesis y la tesis.*

El objetivo de un **problema de resolución** es descubrir ciertos elementos: l***as** incógnitas del problema.* En ellos es necesario diferenciar de modo preciso sus elementos principales: *datos, incógnitas y relaciones entre datos e incógnitas.*

En este documento trataremos particularmente los problemas de resolución.

Destacaremos cuatro pasos fundamentales que le facilitarán al alumno su trabajo:

1er paso:

- Comprender el problema, es decir tener una visión clara de lo que se pide.

2° paso:

- Visualizar o captar las relaciones existentes entre datos e incógnitas.
- Determinar un plan de acción.

Si existiere alguna figura relacionada con el problema es necesario indicar que la dibuje y destaque en ella los datos y las incógnitas

3er paso:

- Ejecutar el plan trazado anteriormente para determinar la solución del problema.

4° paso:

- Revisar
- Discutir
- Verificar la solución hallada.

Ante el planteo de un problema, la primera pregunta es: ¿Por dónde comenzar?
Respuesta: *Por el enunciado*
Sólo cuando al alumno le resulte bien claro podrá continuar con los pasos siguientes.

Preguntas a realizar:
¿Cuáles son los datos?
¿Cuáles son las incógnitas?
¿Cuáles son las relaciones que las ligan, diferenciando claramente cada una de ellas?
Indicar al alumno que proceda a traducir las relaciones entre datos e incógnitas que tiene formuladas, a lenguaje matemático.
Sucede a menudo que este enunciado verbal se divide casi automáticamente en diversas partes, cada una de las cuáles deberá traducir.

Preguntar a los alumnos:
¿Han empleado todos los datos?
¿Han utilizado todas las relaciones entre datos e incógnitas referidas al problema?

En este documento trataremos problemas en los que las relaciones entre datos e incógnitas serán expresadas en lenguaje algebraico y habrá ecuaciones algebraicas o sistemas de ecuaciones algebraicas.

Finalmente, luego de resolver el problema algebraico, se llegará a determinar la solución del problema matemático. Pero, puede no ser la solución del problema planteado. Discuta y verifique las soluciones halladas.

Con seguridad, si el alumno consiguió resolver el problema por sus propios medios, sentirá que ha realizado un descubrimiento

Modelo de problema

Tema: Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas
Objetivo: Poder diferenciar entre el planteo y la solución del problema dado y el planteo y la resolución del modelo algebraico que lo representa.
Metodología: Aula taller
Emisor y receptor activos

Posibilita:

- La comprensión de textos
- El análisis y la reflexión
- La discusión y el debate
- La organización conceptual
- El repaso de conceptos ya vistos
- El desarrollo de habilidades para resolver problemas

Observación: Se remarcan las preguntas que el docente debería formular para guiar el trabajo de los alumnos.

Don Osvaldo Suárez, el ferretero de la esquina, había comprado a buen precio una gran partida de pilas alcalinas de tres cargas diferentes. Enterado de la novedad Sergio corrió hasta la ferretería y le dijo: "Me enteré que tiene para vender pilas a un precio promocional. Yo quiero 22 pilas y sólo tengo 25 pesos, pero además necesito por lo menos una pila de cada clase".Don Osvaldo se rascó la cabeza, hizo unos cuantos números y luego le entregó un paquete que contenía 22 pilas.

¿Cuántas de cada carga podría haber en el paquete, si las de 1 volt costaban $0.50, las de 1.5 V. $2 y baterías de 2 V. $ 3 cada una?

Una forma de resolución:

Tipo de pilas (carga)	Cantidad de pilas	Costo de cada pila	Costo total de las pilas por carga
2v	x	3	3x
1.5v	y	2	2y
1v	z	0.50	$\frac{z}{2}$
Total	22		25

¿Qué ecuaciones se obtienen de este planteo?

Debemos resolver entonces el siguiente problema algebraico: $\begin{cases} x+y+z=22 \\ 3x+2y+\dfrac{z}{2}=25 \end{cases}$

Tengamos en cuenta que **x, y** y **z** representan cantidades y, por lo tanto, sus valores deben ser números naturales. Comencemos entonces preguntándonos:

¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar la incógnita x?
¿Pueden ser valor entre 1 y 20 inclusive?
¿Por qué 20?

Por ejemplo si $x = 1$ resulta que $y = \dfrac{23}{3}$, que no es entero positivo. Por lo tanto

$x = 1$ no puede ser solución del problema.
¿y si $\mathbf{x = 2}$?
Obtenemos como valores: $y = 6$; $z = 14$

¿Es ésta una posible solución del problema?
¿Qué deberíamos hacer?

Efectivamente estos valores verifican las dos ecuaciones del sistema: $\begin{cases} x+y+z=22 \\ 3x+2y+\dfrac{z}{2}=25 \end{cases}$

y son enteros positivos.

¿Pero ésta será la única solución del problema?

Si del sistema anterior eliminamos la incógnita z, obtenemos: $y = \dfrac{28-5x}{3}$

¿Qué signo debe tener este cociente?
¡Sí! Positivo. **¿Por qué?**

¿Cuál es entonces el signo de 28 —5x?

Luego x debe ser menor que $\dfrac{28}{5}$ y además entero positivo.

¿Qué valores puede entonces tomar la incógnita x?
Observación: Organizar una tarea grupal asignándole a cada grupo la determinación de las ternas correspondientes a cada posible valor de x, que sean solución del sistema algebraico.

Ahora bien para x = 1 ; x = 3; x = 4 y x = 5 ¿Qué ternas se obtuvieron?
Observación: Discutir y analizar si las ternas obtenidas dan respuesta al problema dado.
¡Luego efectivamente existe otra solución del problema! ¿Cuál es?

Respuesta: Don Osvaldo Suárez le pudo haber entregado a Sergio 14 pilas de 1 Volt, 6 de 1.5 V. y 2 baterías de 2 V., o bien 16 pilas de 1 Volt, 1 pila de 1.5 V y 5 pilas de 2 V.

Otro modelo de problema

El siguiente es un problema clásico que puede aparecer en libros actuales o de la década del 30. Queremos que veas distintas formas en que dicho problema puede abordarse.

En general este problema no resulta nada sencillo. Sólo aparece un dato numérico explicitado y no son obvias las vinculaciones entre el mismo, los demás datos y la pregunta.

> En un campeonato internacional de ajedrez, cada maestro debió jugar exactamente una vez con cada uno de sus adversarios. Si en total se jugaron 45 partidas (y la cantidad de maestros es un número par), ¿cuál fue el número de maestros?

Pero observaremos cómo todo esto se vuelve más claro cuando logramos ver el “paralelo” (en realidad se suele decir que se trata de problemas isomorfos) entre esta situación problemática y el campeonato de Primera División “A” que organiza dos veces al año (Campeonatos Apertura y Clausura) la Asociación del Fútbol Argentino.

Aquí va la tabla de posiciones al finalizar el torneo clausura 1997 copiada de un diario argentino:

Equipo	Puntos obtenidos	Partidos jugados
River Plate	41	19
Colón	35	19
Newell´s	35	19
Independiente	34	19
Vélez Sarsfield	32	19
San Lorenzo	30	19
Racing	27	19
Platense	26	19
Boca Juniors	25	19
Lanús	24	19
Ferrocarril Oeste	24	19
Unión	24	19
Gimnasia (LP)	23	19
Huracán	22	19
Huracán de Ctes.	21	19
Estudiantes	19	19
Deportivo Español	19	19
Rosario Central	18	19
Banfield	16	19
Gimnasia (Jujuy)	14	19

Basándose en el cuadro anterior, contestaremos las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos equipos participaron?
- ¿Cuántos partidos por fecha se disputaron?
- ¿Cuántas fechas se jugaron?
- ¿Cuántos partidos se jugaron en total?

Respuestas:

- 20 equipos
- 10 partidos por fecha
- 19 fechas
- 190 partidos en el total del campeonato

Analicemos ahora con mucha atención para ver claramente las similitudes entre el problema planteado y nuestro campeonato de fútbol, comprendiendo la correspondencia entre los siguientes pares (llamamos x a la cantidad de maestros, incógnita del problema):

Cantidad de equipos de Primera "A"	Cantidad de maestros
20	X

Otro par es:

Cantidad de partidos que se juegan en una fecha	Cantidad máxima de partidas que pueden jugarse simultáneamente
10	X/2

Pero el par anterior también puede pensarse

Mitad de los equipos	Mitad de los maestros
10	X/2

Otro de los pares (se suele decir "isomorfos") es:

Cantidad de fechas de uno de estos campeonatos de AFA	Cantidad de veces que se reúne cada uno de los maestros a jugar
19	X - 1

Lo anterior viene de pensar que cada equipo (o que cada maestro) juega una vez con cada uno de los otros, pero no con sí mismo.

Por último puede colocarse el dato numérico del problema:

Cantidad total de partidos que se juegan en un campeonato de AFA	Cantidad total de partidas que se jugaron en el campeonato de ajedrez
190	45

Pero si ahora pensamos ¿Cómo se obtuvo el número 190? La respuesta será:

Multiplicando el número de fechas por la cantidad de partidos por fecha, o sea 19 por 10.

Dicho de otro modo: multiplicando la cantidad de equipos menos uno por la mitad de los equipos participantes.
Si recordamos que x es el número de maestros (incógnita del problema) el producto isomorfo con
19 . 10 = 190
será:

$$(x-1)\frac{x}{2}=45$$

que es una ecuación de segundo grado cuya única solución positiva es
x = 10 (verificarlo) que, además es nada más ni nada menos que la respuesta al problema.

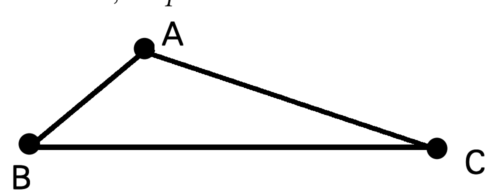
Comentarios:

- El dato que aparece en el problema, referido a que el número de maestros es par, fue necesario por el modo de razonamiento elegido, de lo contrario no resulta relevante.
- No descartamos la posibilidad de que el alumno resuelva tanteando, por ejemplo mediante un diagrama de árbol, la cantidad finita de posibilidades, que aquí es poca, en cuyo caso el docente, de ningún modo debe rechazar esta forma de trabajo.
- Si se desea que el alumno tenga la necesidad del planteo de la ecuación simplemente se deberá buscar un número bastante mayor, por ejemplo 5356 en lugar de 45 para el cual, el tanteo resultará bastante engorroso.

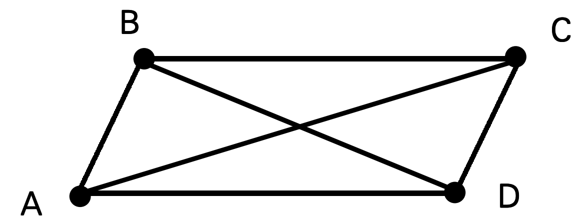
Otro modo de resolución para este mismo problema

Muchas veces nos ocurre, sobre todo si tenemos una formación matemática más o menos sólida, que pensamos que un niño de 12 o 13 años no podría resolver este problema excepto que lo "adivine". Sin embargo con prolijidad y paciencia quizá podría modelizarlo del siguiente modo:
Se necesitan *dos maestros* (representados por los puntos A y B) para jugar *una partida*. Gráficamente podemos visualizarlo mediante un segmento:

Si fuesen *tres maestros*, el número de partidas está dado por la cantidad de segmentos que se pueden formar con tres puntos no alineados, *tres partidas*:

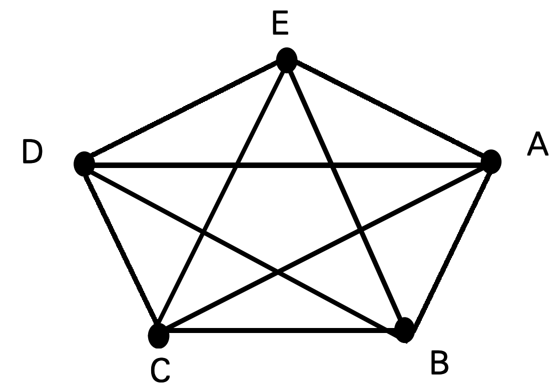


Si fueran *cuatro maestros*:

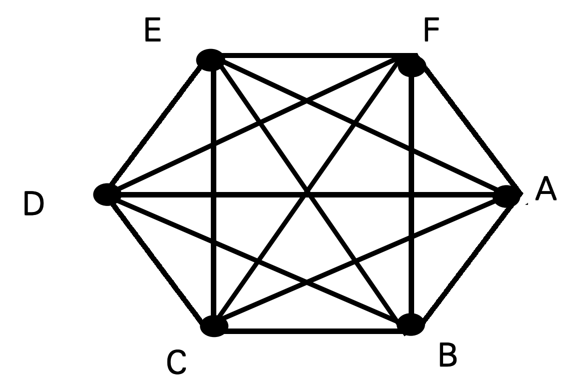


Observemos que el número de partidas está dado por el número de lados más el número de diagonales del cuadrilátero: *seis partidas*.

Con cinco maestros, diez partidas:



Con *seis maestros, quince partidas*:



Y así sucesivamente, con la paciencia de llegar a dibujar un *decágono con todas sus diagonales*. De ese modo verá que el total de los segmentos (lados más diagonales) es 45, para dicho polígono por lo que podrá responder a la pregunta del problema: **10 maestros**.

Todo el trabajo realizado no tendrá sólo objetivos en cuanto al desarrollo de la paciencia y la prolijidad, sino que además nos propondremos tratar de encontrar alguna "ley de formación", alguna "regularidad", como acostumbran decir nuestros colegas de Brasil.

Le pedimos para ello que complete las tres últimas columnas del siguiente cuadro a medida que va trabajando:

Cantidad de lados del polígono	Cantidad de diagonales desde un vértice	Cantidad total de diagonales	Cantidad total de segmentos determinados (lados más diagonales)
3	0	0	3
4	1	2	6
5	2	5	10
6	3	9	15
7	4	14	21
8	5	20	28
9	6	27	36
10	7	35	45

Se observa que en el último renglón quedó también la respuesta al problema.

Seguramente si ahora le pedimos que complete el cuadro que aparece a continuación, sin ayudarse dibujando, completará sin dificultad la segunda columna pues ya habrá descubierto que la cantidad de diagonales desde un vértice es siempre igual al número de vértices menos tres.

Pidámosle que explique con sus palabras porqué. (Una respuesta aceptable podría ser: porque no sale ninguna diagonal hacia los dos vértices consecutivos, que están a la izquierda y a la derecha, ni tampoco hacia él mismo).

Para la gran mayoría de los alumnos resultará muy dificultoso completar la tercera columna. Deberemos entonces orientarlos para que lo logren.

Cantidad de lados del polígono	Cantidad de diagonales desde un vértice	Cantidad total de diagonales	Cantidad total de segmentos determinados (lados más diagonales)
11	11-3 = 8		
12	.		
13	.		
14	.		
15	.		
16	.		
17	.		
18	.		
19	.		

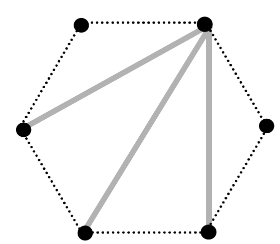
Un recurso posible para tratar de que descubran la ley de formación podría ser el siguiente:

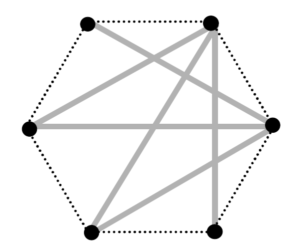
Tomemos, por ejemplo un hexágono para fijar ideas y tracemos todas sus diagonales desde cada uno de sus vértices. Claro que de este modo habrá diagonales que trazaremos más de una vez. Veamos. Te proponemos que te ayudes con dos lápices o marcadores de colores distintos y trabajes sobre las figuras que te damos a continuación, del siguiente modo: con el primer color (para nosotros será gris) dibujá las diagonales que hagas por primera vez.

Cuando tengas que dibujar una diagonal que ya esté dibujada con el primer color, pasale encima el segundo (para nosotros negro).

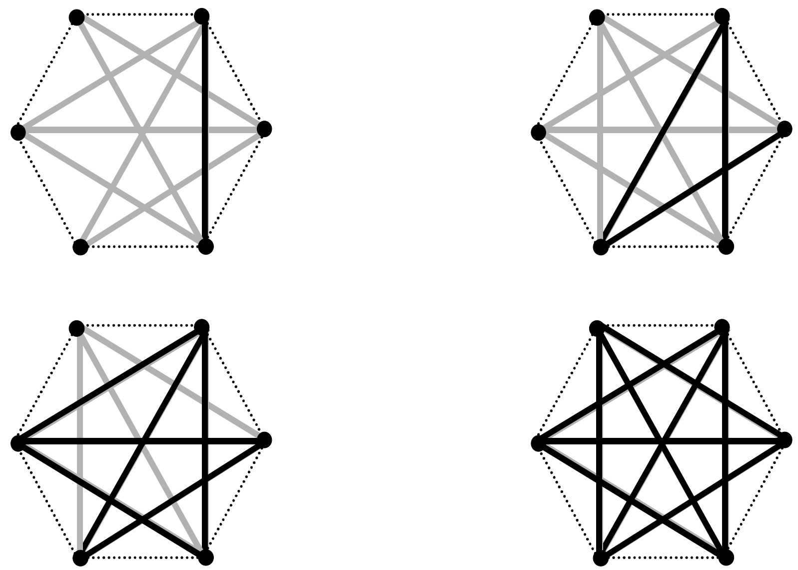
Seguramente habrás podido observar que cada diagonal fue dibujada exactamente dos veces (cada una te quedó pintada de los dos colores porque pasaste una vez cada uno de los colores sobre cada diagonal).

Eso significa que tenés que considerar la mitad de las que dibujaste (porque a todas las dibujaste dos veces).





¿Y cuántas dibujaste entonces?



En este caso 6 (número de vértices) por 3 (número de diagonales por vértice) o sea 18.
Si pensamos ahora en un polígono de x lados (o vértices), por cada x dibujaste x – 3 diagonales o sea $x(x-3)$ diagonales.
Pero recordando que tenés que tomar la mitad, la cantidad de diagonales de un polígono de x lados es:

$\dfrac{x(x-3)}{2}$ el total de las diagonales de un polígono de x lados.

Ahora seguramente te animarás a completar un cuadro más extenso aún que el que te propusimos antes:

Cantidad de lados del polígono	Cantidad de diagonales desde un vértice	Cantidad total de diagonales	Cantidad total de segmentos determinados (lados más diagonales)
11	8		
12	9		
13	10		
14	11		
15	12		
16	13		
17	14		
18	15		
19	16		
20	17		
67	64		
159	156		
x			

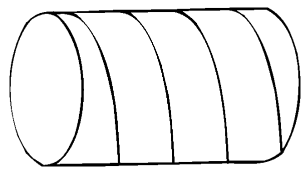
Ahora podemos plantear el problema de los ajedrecistas con la siguiente ecuación:

$$\frac{x(x-3)}{2} + x = 45$$

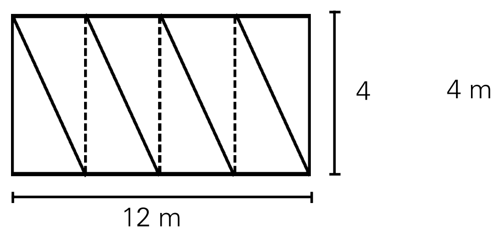
Claro está que será ésta una ecuación de segundo grado cuya única solución positiva es $x = 10$.

Un problema geométrico

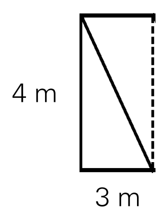
Se tiene un caño de forma cilíndrica de 12 m de largo, su sección es una circunferencia de 4 m de longitud. Una soga rodea al cilindro dando 4 vueltas exactas al mismo. Calcular el largo de la soga.



Si pensamos que se hace un corte longitudinal sobre el segmento que determinan los extremos de la soga en la superficie cilíndrica y luego se aplana se tiene un rectángulo:



Considerando cuatro rectángulos de 3 m por 4 m, y calculando la longitud de la diagonal



$$y = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Luego la longitud de la soga será de 20 m.

Muy frecuentemente nos encontramos con problemas que son casos particulares de otros o bien de propiedades conocidas, cuestión que tanto el docente como el alumno utilizan muy seguido.

Un comentario acerca de este problema

La dificultad de este problema radica en conseguir transportar al plano una cuestión planteada en el espacio. Fue tomado en casi todo el continente europeo y en los Estados Unidos de América, en 1996, a un gran número de chicos de 18 años.
Sólo en 8% fue capaz de resolverlo.

Problemas en otras disciplinas (aplicados a biología, física, química, etcétera)

Cuando se plantea el análisis de algún aspecto de una ciencia en términos de un problema, esta realidad se nos presenta a priori, desordenada, compleja, confusa. En general, con términos específicos de la disciplina.

El primer paso es recortar de la realidad aquello que nos es relevante, que nos sirve para resolver el problema, eliminando los términos propios del campo científico en el que estamos trabajando.

A partir de allí construimos en términos matemáticos, una serie de relaciones o vinculaciones entre los datos, que transfieren la situación real a un conjunto de fórmulas, que usualmente llamamos modelo analítico.

El problema ahora es resolver el modelo analítico. Para ello, se debe apelar a todos los conocimientos matemáticos de que se disponga. Una vez que se ha resuelto el modelo analítico debemos volver a la realidad de que partimos fundamentalmente para confrontar los datos con esa realidad, analizando si el modelo analítico puede insertarse nuevamente en la problemática.

Un caso ilustrativo es el de la regla de tres y los obreros: si 15 obreros pueden hacer una obra en 10 días, ¿cuántos obreros se necesitan para realizarla en 1 día?

El modelo analítico plantea la proporción y la respuesta es de 150 obreros, pero ¿tiene sentido esta respuesta? ¿Cuál es la factibilidad del hecho real? ¿El abordaje matemático soluciona el problema? ¿Tiene solución el problema? Cuando hablamos de solución, ¿a qué nos referimos, a la solución real o a la solución matemática?

Reflexionar con nuestros alumnos sobre estos puntos amplía increíblemente su perspectiva.
Los ejemplos siguientes son abordables desde esta idea. El texto es confuso para el que no pertenece a la ciencia en cuestión, porque es específico, se debe separar lo útil de lo superfluo en el análisis, los resultados obtenidos pueden ser cotejados con el hecho real y analizar así las debilidades del modelo, o sea, como decimos habitualmente, cuándo el modelo “se cae”.

1 - Simpson y Roe (1960) reportaron que en las hembras de la serpiente *Lamprofeltis Polyzona* la longitud total es una función lineal de la longitud de su cola, con una gran exactitud. El dominio es el intervalo entre 30 mm y 200 mm y la imagen es el intervalo 200 mm y 1400 mm. Se han dado las siguientes mediciones: para 60 mm, long del cuerpo de 455 mm para 140 mm, longitud del cuerpo 1050 mm.Busque una ecuación que represente esta relación y dé dos ejemplos más de crecimiento.

2 - De acuerdo con Timoteff y Zimmer (1947), el número de mutaciones producidas en la *drosophila melanogaster* crece casi linealmente con la dosis de rayos X recibida, siempre que esta no exceda el kilo-Roentgen (KR). Sea X la medida en KR e Y el porcentaje de mutación, para dosis cero no se observan mutaciones. Con una dosis de 3 KR el porcentaje de mutación es 8.4%.
Haga el gráfico y establezca una ecuación que represente la situación.
¿Cuáles son el dominio y la imagen? Prevea el porcentaje de mutación al exponerse a una radiación de 1.5 KR. ¿Qué intensidad de radiación se debe aplicar para lograr un porcentaje de mutación del 100% hipotéticamente?

3 - Sea S una fuente de radiación de ondas electromagnéticas, sonido o radiación nuclear. Asumamos para simplicidad que S ocupa un pequeño espacio (un "punto") y envía su energía uniformemente en todas direcciones en el espacio tridimensional.Sea E la energía transmitida por la fuente por segundo.La intensidad I de la radiación recibida a una distancia r de la fuente S se define como energía sobre unidad de superficie.
a) ¿Cómo expresaría la intensidad en términos de energía y unidad de superficie?
Respuesta: $I = E / (4 \pi r^2)$
b) Si la energía es constante, grafique la intensidad en función de la distancia.
c) ¿Qué ocurre con la Intensidad en la realidad cuando me alejo de la fuente?
d) ¿Cómo se reflejaría matemáticamente esta situación?
e) Compare esta respuesta con el resultado anterior. Realice una hipótesis posible para interpretar la diferencia.

4 - En un ecosistema marino el fitoplancton es comido por el zooplancton, por los omnívoros o desaparece, el zooplancton es comido por los omnívoros, por los carnívoros o desaparece. Finalmente los omnívoros y carnívoros se comen entre sí o desaparecen. Pensando en esta situación, defina una relación en S x S y haga una tabla siendo: S= { fitoplancton, zooplancton, omnívoros, carnívoros, eliminación } ¿Es esta relación una función, por qué?

5 - En química, se define al Ph de una solución mediante la fórmula: Ph(h)= Log(1/h), siendo h la concentración de iones de hidrógeno en la solución. Si Ph=7, la solución es neutra. Si Ph>7, la solución es alcalina. Si Ph<7, la solución es ácida. ¿Cuál es el dominio de la función?¿Cuál es la imagen? Si $h= 1.2\ 10^{5}$, ¿la solución es ácida? ¿Qué relación tiene el cálculo con la realidad? Consulte al docente de Química sobre los valores numéricos obtenidos y los valores hallables en la realidad.

Otros problemas sugeridos

1. Un rectángulo de papel se lo divide en 8 franjas verticales iguales y en 6 horizontales iguales, quedando dividido en cuadrados ¿Qué parte del área total representa cada cuadrado? Si cada cuadrado tiene 10 cm de perímetro, calcula las dimensiones y el área del rectángulo original.

2. Si el inverso de un número real **a – 4** es 1/5 ¿Cuál es el opuesto de a + 1?

3. Si la altura de un rectángulo es la mitad de la base y el área es de 64 m^2, calcula la medida de la base y de la altura.

4. Un círculo cuyo radio mide 0,25 cm gira a lo largo de una recta coordenada, a partir del origen y en dirección positiva. Si el punto P es el punto de tangencia entre el círculo y la recta determina las coordenadas de P después de una, dos y diez revoluciones completas.

5. Si se duplica la longitud de un lado de un cubo, ¿se duplica su área? ¿Y su volumen? Si la longitud del lado aumenta k veces ¿cuántas veces aumenta el área y el volumen?

6. La población de una pequeña ciudad de Santiago del Estero disminuyó de 17.490 a 16.980 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento de la población?

$$P_d = \frac{cantidad\ de\ decrecimiento}{cantidad\ original} \times 100\%$$

7. El precio de oferta de una pelota de fútbol es de 21,45 pesos. Si el descuento fue del 25 % ¿Cuál era el precio original de la pelota?

8. ¿Cuál es el costo final de una moto de 9000 dólares si se otorga un descuento del 5% y se le aplica el 9% de impuestos a las ventas? ¿Y si el aumento fue del 4%?

9. El costo de colocar un aislante térmico en una casa de dos habitaciones es de 1080$. En la actualidad el promedio mensual de los costos de calefacción es de 60 $, pero se espera que el aislamiento los reduzca en un 10 por ciento. ¿Cuántos meses se tardará en recuperar el costo del aislamiento?

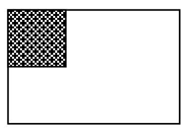
10. Se desea construir un silo grande para granos en forma de cilindro circular recto con una semiesfera unida a la parte superior. El diámetro del silo debe ser de 30 pie pero la altura aún no se estableció. Determina la altura del silo para que su capacidad sea de 11.250 π pie cúbico. Si en un m^3 se pueden guardar 1,3 toneladas de granos, ¿cuántas toneladas podrán guardarse en el silo?

Las aproximaciones racionales a raíces cuadradas se pueden hallar con una fórmula descubierta por los antiguos babilonios. Sea x_1 ¹ 0 la primer aproximación racional para $\sqrt{n}$. Si $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right)$ entonces x_2 será una mejor aproximación para $\sqrt{n}$ .y podemos repetir el cálculo con x_2 en lugar de x_1.

Utilizando este procedimiento determina una aproximación de $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$
Con los tres primeros decimales exactos.

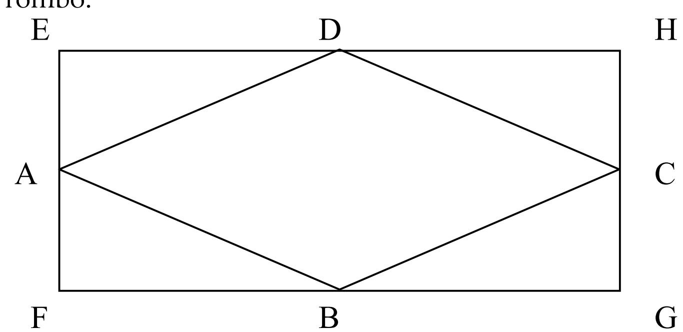
Observación: Para calcular una aproximación de $\sqrt{2}$ comienza los cálculos tomando $x_1 = \frac{1}{2}$

1. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como lo muestra la figura un lado se extiende 2 cm y otro 5cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de 130 cm.^{2} ¿Cuáles son las posibles longitudes de un lado del cuadrado original?



2. En la figura, A; B; C y D son puntos medios de los lados del rectángulo EFGH Si el lado EH mide $6\sqrt{2}$ cm. y el lado EA $\sqrt{6}$ cm.

Calcula el perímetro del rombo.
Calcula el área del triángulo de vértices EAD
Calcula el área del rombo.

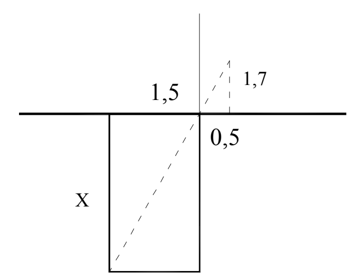


3. En un patio cuadrado de 16 m. de lado se quiere construir 4 maceteros iguales, uno en cada esquina. La base de cada macetero será un triángulo rectángulo isósceles.

a) Realiza un croquis del patio y sombrea la base de los maceteros.
b) Si la profundidad de los maceteros debe ser igual a la medida del cateto, ¿cómo varía el volumen de cada macetero en función de la medida del cateto?
c) Encuentra una fórmula que muestre cómo varía el área libre del patio en función de la medida del cateto del macetero.
d) Dado el polinomio determinado en c), calcula el valor numérico del polinomio cuando la indeterminada toma el valor 2 y cuando toma el valor 9. ¿Qué significado concreto, a la luz del problema planteado, tienen esos valores calculados?

4. Para construir las bases del edificio se habían comenzado a realizar las excavaciones. Salvador, un robusto capataz de 1,70 m. de altura, era el encargado de controlar las dimensiones de la excavación. Para ello utilizando unas sencillas reglas geométricas comenzó su tarea. Midió primeramente el ancho de la excavación que era de 1,5 m, y seguidamente comenzó a retroceder hasta que alineó su visual con el borde de la excavación y el fondo de la misma. En ese momento tomo la distancia que lo separaba del borde de la excavación. ¿En que regla de la geometría se baso Salvador? ¿Pudo determinar la profundidad de la excavación?¿Cuál es?

4. Para construir las bases del edificio se habían comenzado a realizar las excavaciones. Salvador, un robusto capataz de 1,70 m. de altura, era el encargado de controlar las dimensiones de la excavación. Para ello utilizando unas sencillas reglas geométricas comenzó su tarea. Midió primeramente el ancho de la excavación que era de 1,5 m, y seguidamente comenzó a retroceder hasta que alineó su visual con el borde de la excavación y el fondo de la misma. En ese momento tomo la distancia que lo separaba del borde de la excavación. ¿En que regla de la geometría se baso Salvador? ¿Pudo determinar la profundidad de la excavación?¿Cuál es?



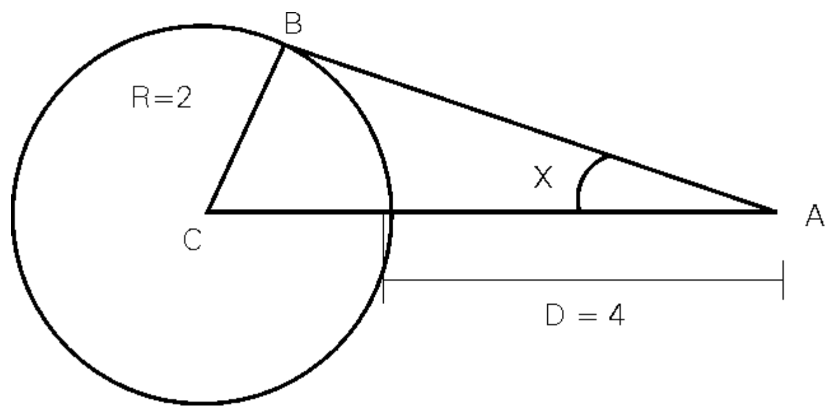
16. A, B y C son tres ciudades, las rutas que unen C con B y A con B son perpendiculares entre sí y miden 80 km y 52 km respectivamente. Se desea asfaltar la ruta que une A con C y la construcción se comenzará desde ambas puntas. Averiguar con qué ángulo deberá comenzarse desde A y con qué ángulo desde C.

17. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo rectángulo si, siendo α uno de sus ángulos agudos, $\cos \alpha = 0{,}6$ y el cateto adyacente a α mide 3 cm?

18. Si la sombra de un poste es la tercera parte de su altura ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el horizonte?

19. Una persona de 1,70 m de altura observa de pie el punto más alto de la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 450. Si la distancia del observador al árbol es de 15 m, ¿puedes estimar cuál es la altura del árbol?

20. Observa la figura:

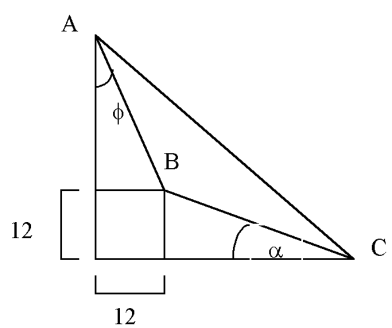


a) El triángulo de vértices A, B y C es rectángulo ¿Cuál es el ángulo recto? ¿Por qué?

b) Si **x** es el ángulo de la figura calcula tg x, justifica

c) ¿Puedes calcular la longitud del lado AB?

23. Hallar el área y el perímetro del triángulo ABC de la figura, sabiendo que:
$\text{sen}\alpha = 3/5$ y $\text{tg}\,\phi = 3/4$



La resolución de problemas como metodología**

Tomemos nuevamente el texto de un artículo publicado recientemente por Raúl R. Halmos, autor de *Teoría intuitiva de conjuntos*:
"¿En qué consiste verdaderamente la matemática? ¿*Axiomas* (como el postulado de las paralelas)? ¿*Teoremas* (como el teorema fundamental del álgebra)? ¿*Demostraciones* (como la demostración de indecibilidad del Godel)? ¿*Conceptos* (como conjuntos y clases)? ¿*Definiciones* (como la definición de dimensión de Menger)? ¿*Teorías* (como la teoría de categorías)? ¿*Fórmulas* (como la fórmula de la integral de Cauchy)? ¿*Métodos* (como el método de aproximaciones sucesivas)?
Seguramente, la matemática no podría existir sin estos ingredientes; todos le son esenciales. Sin embargo, es una opinión defendible, que ninguno de ellos está en el corazón del tema, que la razón principal de la existencia de un matemático es la solución de problemas, y que, por lo tanto, de lo que verdaderamente consta la matemática es de problemas y soluciones."

Tendremos una razón de volver al artículo de Halmos para sostener nuestros puntos de vista: por el momento analicemos esta afirmación y pongámosla en perspectiva histórica. La manera como emplearemos la perspectiva histórica será la siguiente. Veremos cómo cada uno de los componentes que menciona Halmos surge históricamente como solución de algún problema. En lo posible, nos referiremos al mismo ejemplo que él ha puesto después de cada componente.

No cabe duda de que los **axiomas** surgen como respuesta a algún problema que se presenta. En cuanto al conjunto de axiomas que utilizó Euclides podemos hacer las siguientes observaciones. En primera instancia, la idea de un sistema axiomático donde son enunciados sin demostración los primeros principios, de los cuales toda proposición siguiente se deducirá, es originalmente de Aristóteles.

El descubrimiento de los números irracionales y la consecuente crisis en la filosofía Pitagórica de número fue un trauma para la naciente disciplina de la ciencia, y fue precisamente la idea de enunciar un teorema o principio general (teorema de Pitágoras) tan característico de la ciencia griega que llevó a dicho descubrimiento. Contrariamente a lo que comúnmente se dice, que los griegos rechazaron en definitiva la existencia de números irracionales, lo que siguió este descubrimiento fueron varios siglos de desarrollo de la demostración como sistema de conocimiento.

Surgió la idea de hacer explícitas las presuposiciones que se hacían como punto de partida, las reglas de inferencia que se utilizarían, etc. En esta gran tradición de la lógica aristotélica surgió el axioma como componente de la matemática. Era una admisión de la imposibilidad de demostrarlo todo (porque Aristóteles entendió perfectamente que esto equivale a un círculo vicioso) y una afirmación que las consecuencias lógicas de tipo universal (teoremas) no podrían eliminarse por simple capricho.

** *Extractado de un artículo de la Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.*

Por otra parte, en referencia al quinto postulado de Euclides, éste tiene la característica de ser original de Euclides quien lo propuso porque lo necesitaba para ofrecer una demostración de varios de los teoremas de la geometría. Euclides se propuso organizar o compilar toda la matemática griega conocida hasta aquel entonces en sus Elementos empleando la estructura de la lógica aristotélica para evitar traumas como el sucedido al sistema pitagórico.

Para lograr esto -resolver el problema de poner la matemática sobre sólidas bases lógicas libres de cualquier limitación mística vaga- Euclides vio la necesidad de enunciar el quinto postulado. El rechazo inmediato que suscitó el postulado perduró por más de 20 siglos, pero la historia reivindica a Euclides y muestra que su solución del problema fue correcta.

El **teorema** fundamental del álgebra sostiene que una ecuación polinómica de grado n tiene a lo sumo n raíces, y exactamente n raíces si se toman en cuenta raíces "múltiples".
Por ejemplo, la ecuación cuadrática $\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$ tiene raíz 1, pero ésta es una raíz de multiplicidad 2, porque la ecuación se factoriza como $\mathbf{(x - 1)\ (x - 1) = 0}$.

El teorema parece inofensivo a nuestros ojos y poco nos imaginamos las polémicas históricas asociadas con él. Para que llegara la comunidad matemática a este resultado pasaron al menos quince siglos. Los griegos conocían la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, pero como asociaban los números con las longitudes de segmentos construibles con regla y compás (o dicho de otra manera daban soluciones geométricas a las ecuaciones), una ecuación como $\mathbf{x = 0}$ o $\mathbf{x^2 + 2x + 1 = 0}$ no tenía ninguna raíz según su sistema matemático. Un poco más adelante en la historia, hacia el final de la escuela alejandrina (griega), el gran matemático Diofanto propuso el siguiente problema:

| Halle los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7. |

En notación actual, la ecuación resultante es: $\mathbf{6x^2 - 43x + 84 = 0}$ que tiene raíces complejas.

Su conclusión evidente: *no tenía ninguna solución.*

Pasarían varios siglos hasta que matemáticos hindúes empezaron a reconocer raíces negativas y que Fibonacci (Leonardo de Pisa) descubriera que algunas raíces (reales o longitudes de segmentos) no eran construibles con regla y compás. El descubrimiento en el siglo XVI por matemáticos italianos de fórmulas para resolver ecuaciones cúbicas y cuárticas puso aún más en claro que de estas ecuaciones surgen raíces que no tienen una interpretación en el sistema geométrico griego. **Por lo pronto surgían nombres folclóricos como raíces "reales" e "imaginarias" pero la tendencia casi universal era de rechazar estas raíces porque no "existían". Está claro que sin estos números, los imaginarios, el teorema fundamental es falso.**

Ahora bien, a mediados del siglo XVII el matemático inglés, John Wallis dio interpretaciones claves a estos nuevos números: **carácter vectorial a los números con signo y diferenciación entre números reales como números sobre una recta y números complejos como números en un plano.**

La interpretación canónica de los números complejos que asocia a cada pareja ordenada de números reales (a, b) el número complejo a + bi se debe a Gauss, quien fue el primero en demostrar el teorema fundamental del álgebra. Su esquema representa una interpretación vectorial completa, tanto para los números negativos como los imaginarios y resuelve, de una vez por todas, la cuestión de la existencia de dichos números porque les atribuye existencia geométrica. No es una coincidencia el que su demostración emplee elementos geométricos, y en fin, podemos observar que la inclusión de este teorema demostrado como componente innegable de la matemática se debe a la resolución final del problema de existencia que durante siglos confundió a los matemáticos.

El tercer componente que menciona Halmos es la **demostración.** ¿Son las demostraciones el "corazón" de la matemática? De antemano venimos prevenidos, porque sabemos que otro componente esencial es el de los axiomas que NO se demuestran. Y efectivamente, la demostración de Godel, quizá la más ingeniosa del siglo XX, que cambia radicalmente la naturaleza de la lógica, surge también como solución de un problema que afligía a los matemáticos desde la creación de las geometrías no euclidianas.

La existencia de tres sistemas axiomáticos paralelos y mutuamente excluyentes que atribuyeron características totalmente diferentes al espacio (ninguna paralela, una sola paralela, infinitas paralelas) cambió el concepto de "verdad matemática" y lo sustituyó por el de "consistencia".

Se requirió una axiomatización de la ciencia matemática, puesto que estas características diferentes surgen de sistemas axiomáticos distintos. Pero la consistencia fue un tanto resbalosa, pues el criterio normal de consistencia es la existencia de un modelo. Este, a su vez, pertenece a otro campo matemático cuya consistencia se tendrá que demostrar para que el modelo garantice la consistencia del sistema en cuestión. Eventualmente, todo remonta a un proceso reminiscente del círculo vicioso, a no ser que se pueda producir una demostración de consistencia absoluta. Este fue un problema, tal vez el problema principal, de la matemática durante medio siglo; se encuentra en la famosa lista de problemas dados por Hilbert en el congreso internacional de París, y de hecho Hilbert dedicó buena parte de su vida a su solución. La demostración de Godel es la respuesta final ante este problema: es imposible hallar una demostración de consistencia absoluta en un sistema lo suficientemente rico para desarrollar la matemática elemental de los números naturales. Creo que esto ilustra claramente que la demostración como ente matemático se ocupa de resolver problemas, los problemas más generales que se presentan.

Para no extendernos demasiado, daremos unas descripciones más someras de los demás componentes que menciona Halmos y su relación con la resolución de problemas. En cuanto a los conceptos de conjunto y clase, estos toman importancia histórico-matemática como bases no geométricas de los sistemas numéricos, dado que la geometría había perdido su naturaleza de verdad absoluta, y que se buscaba construirle una adecuada filosofía para la matemática que ya no podría considerar sus leyes en correspondencia 1 - 1 con las del mundo físico. La solución ofrecida por Cantor, Frege y Bertrand Russell fue la construcción de la matemática sobre la base de la lógica, y en esto son indispensables (intermedios entre conceptos lógicos y numéricos) los conceptos de conjunto y de clase.

En cuanto a la **definición** de dimensión de Menger, se puede comentar que ésta, que generalmente e intuitivamente empleamos, generaliza las dimensiones del espacio euclidiano a través de la estructura de espacio vectorial que poseen estos espacios. Desdichadamente, en la disciplina de la topología se cuenta con una estructura más débil que la del espacio vectorial y las extensiones ingenuas de conceptos euclidianos fallan. Matemáticos importantes, como Poincaré, hicieron repetidos intentos por formular una definición adecuada de dimensión para espacios topológicos y fallaron. La definición de Menger es una resolución apropiada de ese problema.

Las **fórmulas** en matemáticas con frecuencia constituyen métodos específicos de solución de un cierto conjunto de problemas. Otra función que cumplen, y este es el caso de la fórmula de Cauchy, es la de representar un ente matemático en términos de otros ya conocidos o más fáciles de manejar. Por medio de la fórmula se resuelve el problema de conocer el comportamiento o manipular los nuevos entes. Cauchy estaba trabajando en análisis de funciones complejas cuando introdujo su fórmula de la integral. Es de todas maneras apropiado comentar que, en ese momento, Cauchy no estaba interesado principalmente en las funciones complejas en sí sino en el problema de la evaluación de integrales reales utilizando variables y constantes complejas.

Por último, asociamos los **métodos directamente con la solución de problemas**. El método de aproximaciones sucesivas, perteneciente al análisis numérico, es especialmente ilustrativo porque se utiliza para resolver problemas que no son cobijados por los teoremas y métodos generales. Esto es particularmente cierto para el método de aproximaciones sucesivas para hallar las raíces de una ecuación polinómica, porque los resultados de Galois dan criterios explícitos de la posibilidad de resolución por fórmula. En general, no existe una fórmula de solución y no nos queda sino recurrir a otros métodos para obtener las raíces. El método de aproximaciones sucesivas, que nos permite hallar las raíces con el grado de exactitud que nos conviene, resuelve el problema sin enfrentarse a las limitaciones teóricas.

Quizás hemos pecado por detallistas con la exposición anterior, pero tenemos enfrente una tradición que ha acabado por colocar cualquiera de estos "componentes" de la matemática en posición de privilegio, por encima de la solución de problemas.

Tanto la corriente que reduce la participación estudiantil a horas de aburridos y repetidos ejercicios, que fijan una determinada fórmula, por ejemplo, como la que intenta formalizar la matemática escolar y reducirla a la memorización de definiciones, propiedades, etcétera, *se burlan de la actividad propia del matemático a través de los siglos y de cualquier utilidad que podría tener el curso de matemática para la vida de los alumnos*. El hecho es que en la vida real nunca se encuentran problemas como $90 \div 12$,
ó $500 - 178$
ó $x^2 - 2x + 1 = 0$ sino como el siguiente:

> Si la docena de huevos vale $ 90, ¿cuántos huevos alcanzo a comprar con los cincuenta pesos que tengo? O si el cliente compra artículos por valor de $178 y me da un billete de $500, ¿cuánto le debo devolver?

Éstos, por sencillos que sean, ya son problemas porque no reducimos la actividad del alumno al de una calculadora dándole los números y las operaciones, sino que él debe, de una situación concreta, plantear la operación y determinar los números pertinentes. Si luego prosigue a hacer los cálculos él mismo, o los hace con calculadora no importa.

Le estamos preparando para enfrentar las situaciones que se le pueden presentar tanto en la vida "real" como en sus estudios posteriores, es un ser que piensa, que entiende el tema suficientemente como para usarlo para resolver un problema. Esto tendrá que impactar profundamente en nuestra metodología de la enseñanza. Recordemos que la clase de preguntas que hacemos influye directamente sobre la clase de respuestas que obtendremos: vimos que se obtienen cosas tan diferentes como un axioma o un método, según la clase de problema que se propone resolver.

Más adelante en su artículo, Halmos dice lo siguiente: *"Supongamos que hay 40 tópicos importantes que debemos exponer a nuestros estudiantes en un semestre. ¿Se sigue que tenemos que dar 40 exposiciones completas y esperar que todas sean absorbidas (por los alumnos)? No podrá ser mejor dar a 20 de los tópicos una mención de diez minutos (su nombre, su enunciado y una indicación de una de las direcciones en que puede ser aplicado), y tratar los otros 20 profundamente, con problemas resueltos por los estudiantes, contra ejemplos construidos por los estudiantes, y aplicaciones descubiertas por los estudiantes? Creo firmemente que este método enseña más y enseña mejor".*

Aunque Halmos se dirige a la enseñanza universitaria, este comentario es especialmente importante para nosotros, puesto que una de las excusas que más frecuentemente se ofrece, para no profundizar un tema con la solución de problemas relacionados, es la falta de tiempo.

Todo esto forma parte de la trivialización de la enseñanza de la matemática, trampa en la cual no podemos dejarnos caer. Nótese que el problema es el principio, la motivación, y el fin; la aplicación o utilización del tema, es la actividad que hace cada tema propio para cada cual. Necesariamente, entre principio y fin hay campo para la contribución del profesor y habrá alguna exposición necesaria. Pero, si los problemas y sus soluciones constituyen, como lo hemos querido mostrar, el corazón de la matemática, todo lo que hacemos debe adquirir esta perspectiva, desde la más sencilla definición hasta el más general de los teoremas.

Problemas interesantes

A continuación se dan ejemplos de algunos de los problemas que el profesor puede insertar. Se verá que no se está consumiendo inútilmente un tiempo precioso, sino que por el contrario se está realizando la actividad característica de la matemática.

En primera instancia queremos diferenciar entre lo que denominaremos problema y lo que denominaremos ejercicio o simple pregunta. Cuando se propone un problema, éste debe requerir una contribución propia u original del que lo resuelve. Esto no quiere decir que debe resultarle casi imposible resolverlo. No queremos frustrar a nuestros estudiantes sino animarlos y motivarlos. Los problemas que queremos considerar sencillamente invitan a nuestros alumnos a ejercitar su habilidad de pensar y de relacionar. Si logramos motivar a nuestros alumnos hemos ganado la mitad de la batalla ("donde hay voluntad, hay camino"). Las tres características que buscamos en un problema son, por lo tanto, que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata.

De acuerdo con estos criterios, las divisiones largas por temibles que parezcan no son problemas sino meros ejercicios. Nuestro propósito ahora es dar sugerencias para que el profesor pueda crear problemas interesantes para sus alumnos. Algunas de ellas se inspiran en un trabajo presentado por Thomas Butts en el IV Congreso Internacional de Educación Matemática en agosto de 1980.

A. Proponer una serie de ejercicios relacionados que sean ejemplos de algún patrón general. Éstos, aunque son ejercicios, conllevarán a un análisis más profundo por las interrelaciones que existen entre ellos.

a) Escoger dos números naturales cualesquiera. Hallar su suma y su diferencia (restar el menor del mayor). Sumar estos dos resultados. ¿Qué observaciones pueden hacerse?

b) Escoger dos números de tres cifras que terminan en los dígitos 76 y multiplicarlos. ¿Qué se observa? ¿Qué pasa si se multiplican dos números de cuatro dígitos que terminan en 76? ¿Puede decir algo más general? ¿Cuáles de los siguientes números podrían ser potencias de 76: 12760, 13476, 1456, 67354, 5776, 26816? ¿Puede demostrar su resultado? ¿Puede encontrar otro par de dígitos finales con la misma propiedad?

c) Calcular 25^2, 35^2, 45^2. ¿Qué comportamiento se observa?

d) Calcular $1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3)$.
$1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + 1/(3\cdot 4)$
$1/(1\cdot 2) + 1/(2\cdot 3) + 1/(3\cdot 4) + \_\_\_\_\_ + 1/(99\cdot 100)$
¿Qué generalización puede hacerse?

B. Proponer el recíproco de una pregunta común. En términos generales, el recíproco de un ejercicio puede ser un problema interesante. Además, este tipo de problema interesa porque frecuentemente existen varias soluciones, y éste es el caso más general en matemáticas.

a) Hallar tres problemas de aritmética cuyo resultado final sea 13.
Incluir cada una de las 4 operaciones elementales al menos una vez, o alternativamente, exactamente una vez.

b) ¿Cuál es el mayor número que se puede escribir con tres "doses", con tres "treses", con tres "nueves" y ningún símbolo operatorio?

e) Hallar tres sólidos cuya área superficial sea 60 cm^2.

d) Escribir 45 y 525 como la suma de enteros consecutivos de tantas maneras como sea posible. (Debe especificarse si se permiten negativos o no).

e) Proponer "alfaméticos" como el siguiente:

```
  ABC
x BAC
 ***C
```

C. Proponer problemas que requieren un ejemplo del alumno. Éstos, bien utilizados, pueden encaminar al estudiante hacia el descubrimiento de relaciones importantes en la matemática. Por otra parte, la gran variedad de respuestas a algunos de ellos tiende a desfavorecer a aquel alumno que memoriza sin entender.

a) Dar un ejemplo de una fracción menor que 1/300.
b) Dar un ejemplo de una fracción mayor que 15/17.
c) Dar un ejemplo de un triángulo en el cual una de las medianas coincide con una altura.
d) Dar la ejecución de una circunferencia que sea tangente a ambos ejes coordenadas.
e) Dar un ejemplo de un rectángulo cuya área es igual, en valor numérico, a su perímetro.

D. Proponer un problema con datos realistas. Este punto conjuntamente con el siguiente, nos guían hacia el mejor contexto de los problemas. El enunciado de los problemas debe hacerse en un contexto que tenga interés para el alumno. Hay gran variedad de personalidades en cualquier grupo de estudiantes, pero hay dos contextos que han mostrado ser de gran motivación: el más realista y el más imaginativo.

a) Un parásito se divide en dos cada 27 horas. Si todos los parásitos sobrevivieran, ¿en cuánto tiempo ocuparían los descendientes de un solo parásito un volumen igual al del sol? Suponemos además, que la cuadragésima (40^a) generación de parásitos ocupe un volumen de 1 metro cúbico y que, el volumen del sol sea aproximadamente de 10^{27} metros cúbicos.

b) Un litro de pintura es suficiente para cubrir 12 metros cuadrados de pared. ¿Cuántos litros debo comprar para dar dos manos de pintura a una pared de 3,45 m de ancho y 2,30 m de alto, si tiene un zócalo de 10 cm de alto y dos ventanas de 1,20 m de alto y 98 cm de ancho?

c) El agua marina corriente contiene muchas sustancias disueltas, aproximadamente 33 000 partes por millón (ppm). Esta agua es altamente tóxica para el consumo humano porque contiene elementos como bario y boro además de sustancias más comunes como calcio, potasio, sodio, magnesio, etc. El agua marina reducida a 5000 ppm resulta todavía tóxica. Aunque se ha comprobado que los humanos pueden tolerar hasta 3000 ppm, estos sólidos disueltos no deben exceder 500 a 1000 ppm en agua potable de buena calidad. En el agua que se utiliza para irrigación no debe haber más de 1500 ppm de dichos sólidos. ¿Cuántos galones de agua marina deben mezclarse con agua potable de 500 ppm para obtener 1000 galones de agua para irrigación de 1500 ppm?

E. Proponer un problema donde la incógnita sea algo que, en la realidad, se esperaría que fuera desconocida. Este es un punto clave en el problema realista que ilustraremos con el siguiente ejemplo.

El coliseo cubierto de Pueblo Grande tiene capacidad de 20 000 espectadores - 8000 de preferencia y 12 000 de admisión general. Los boletos de preferencia valen $100 y los de admisión general $50. El conjunto sensación dio un concierto en el coliseo. Si se recogió la suma de $1 300 000 de la venta de boletos, ¿cuántos boletos de preferencia se vendieron?

Esta es una pregunta estéril porque el administrador del coliseo sabe seguramente cuántos boletos de cada tipo fueron vendidos. Pero, en la etapa anterior a la realización del concierto, hay que planear las estrategias (de distribución de boletos, propaganda, etc.) a seguir. Un problema más realista sería el siguiente:

El coliseo cubierto de (...) general $50. El promotor estima que sus gastos para limpieza, programas, etc. serán de $100 000. Si el grupo que se presenta pide el 40% del valor de cada boleto vendido además de una suma base de $40 000, ¿cuántos boletos de preferencia tendrá que vender para no sufrir ninguna pérdida para lograr una ganancia de $500 000?

F. Proponer un problema donde la incógnita sea algo que una persona verdaderamente tendría motivo de averiguar. Como ejemplo, podemos volver a nuestro problema de los huevos.

a) Si una docena de huevos vale $90, ¿cuántos huevos puedo comprar con los $50 que tengo?

b) Una pizza mediana de diámetro 20 cm sirve a dos personas. ¿Cuántas personas se podrán servir con dos pizzas grandes de diámetro 30 cm?

c) Alguien quiere comprar un coche nuevo pero no puede pagar más de $ 300 mensuales. Si los préstamos sobre coches se hacen a lo sumo por 36 meses con un interés mensual de 2,4% y sin cuota inicial, ¿qué valor debe tener el coche que la persona contempla comprar?

G. También forman parte del realismo aquellos problemas que contienen datos extraños o insuficiente información. En la práctica casi todo problema se nos presenta en un contexto envuelto en datos que no tienen nada que ver, o análogamente, donde nos faltan datos para obtener una solución determinada.

En el problema anterior, por ejemplo, nos falta saber el precio mínimo que tengan los coches nuevos, pues de nada nos sirven las condiciones si este mínimo es de $ 15000. ¿Por qué?

Un problema netamente geométrico que acostumbra al estudiante a enfrentar situaciones donde faltan datos para precisar la solución:

Dos lados de un triángulo tienen longitudes 4 cm y 6 cm respectivamente. Hallar el perímetro y el área del triángulo.

Aplicando el razonamiento apropiado obtenemos: $12 \leq P \leq 20$, y, $0 \leq A \leq 12$, o sea, el problema en realidad posee más de una solución. Es falso decir que no posee ninguna.

Problemas abiertos

El rey de los problemas es el problema abierto que invita al alumno a una verdadera experiencia investigativa. En este tipo de problemas, el enunciado no indica nada sobre la forma como se puede resolver. Por lo tanto, las palabras que se utilizan deben seleccionarse cuidadosamente para encaminar al alumno a entenderlo.

A. En primer lugar, donde es posible, debe llevarlo a formular una hipótesis o estimar la respuesta. Por ejemplo, en lugar de proponerle que demuestre que para todo n = 2, 3, 5 un cuadrado puede particionarse en n cuadrados más pequeños. Preguntamos: ¿Para cuáles enteros positivos n es posible particionar un cuadrado en n cuadrados más pequeños?

En lugar de decir "Demostrar que $(n - 1)! = 0 \pmod{n}$ si y sólo si n es un número compuesto mayor que 4", decir:

¿Para cuáles enteros positivos n, es n un factor de: (n - 1) (n - 2)... 3.2.1? Por ejemplo, 5 no es factor de 4.3.2.1 = 24, pero 6 sí es factor de 5.4.3.2.1 = 120.

Los ejemplos se han puesto para dar una pequeña pista o para dejar bien en claro el enunciado del problema.

B. Otra expresión que se puede usar para enunciar un problema abierto es "hallar todos", o ponerlo en forma de pregunta. Unos ejemplos son:

a) Hallar todos los primos p para los cuales 5p + 1 es un cuadrado perfecto.
b) ¿Para cuáles enteros positivos n tiene la fracción l/n una expansión decimal finita?
c) ¿En cuáles cuadriláteros ocurre que las diagonales se bisecan?

C. Por otra parte, para animar a la investigación podemos: (1) proponer en forma de pregunta un problema que no tiene ninguna solución (2) proponer en forma de pregunta un problema que tiene una única solución.

Consideremos los ejemplos siguientes:

a) ¿Cuáles enteros del conjunto 17, 27, 37, pueden escribirse como la suma de dos números primos?

b) ¿Para cuáles valores enteros de x, y tiene solución la ecuación 12x + 31y = 170?

D. Proponer un problema imaginativo. Esta es la otra cara de la moneda, pues los dos extremos, problemas realistas y problemas bien imaginativos, son los más indicados para provocar la curiosidad e interés del alumno.

Un ejemplo bastante conocido es:

a) Dos ciclistas que están separados por una distancia de 200 km arrancan al mismo tiempo para encontrarse. El primer ciclista viaja a 25 kmh y el segundo a 20 km/h. Al mismo tiempo, una mosca empieza a volar entre las dos bicicletas, comenzando en el punto más adelante de la bicicleta del segundo pedalista. Si la mosca vuela a 40 km/h y va y viene entre las dos bicicletas, sin perder tiempo para cambiar de dirección, ¿cuánta distancia cubrirá la mosca antes de que se encuentren las bicicletas?
O este:

b) Ocho ranas de diferentes razas se encuentran en un tablero de ajedrez de tal forma que no hay dos de ellas en la misma fila o columna. Al darles la señal, empiezan a saltar simultáneamente a razón de un salto por segundo. Si se cumple siempre que no se encuentran dos en la misma fila o columna, ¿durante cuánto tiempo podrán saltar sin volver a un arreglo (disposición) que ya habían ocupado?

Finalizando, y a manera de resumen podemos señalar que lo que buscamos es proponer un problema de tal manera que el alumno se sienta motivado para resolverlo, lo entienda y recuerde luego el concepto o método pertinente, y aprenda así algo del "arte" de resolver problemas que le servirá tanto en sus estudios posteriores como en las relaciones que hará entre sus estudios y los problemas que enfrentará en la vida real.

Bolt, Brian, *Matemáquinas*. Barcelona, Labor, 1992.

Cole, K. C., *El universo y la taza de té.* Barcelona, Grupo Z, 1999.

Dudney, H. E., *Los acertijos de Canterbury.* Buenos Aires, Granica, 1989.

Foncuberta, J. y Barallobres, G., *Análisis matemático, sus aplicaciones.* Buenos Aires, Prociencia Conicet, 1997.

García, Carboni, Salerno, *Curso de nivelación de ingeniería* UNLP. La Plata, Editorial de la UNLP.

Gardner, M., *Los acertijos de Sam Loyd.* Madrid, Zugarto, 1992.

Gardner, M., *Nuevos acertijos de Sam Loyd.* Madrid, Zugarto, 1999.

Gell-Mann, M., *El Quark y el Jaguar.* Barcelona, Tusquets, 1998.

Guasco, M. J., Crespo, C. y otros, *Geometría, su enseñanza.* Buenos Aires, Prociencia Conicet, 1996.

López-Pellet, *Matemática en Red*. Buenos Aires, AZ Editora, 2000.

Mason, J., Burton, L. y Stacey K., *Pensar matemáticamente*. Barcelona, Labor, 1992.

Newman, J., *Sigma, el mundo de las matemáticas.* Madrid, Grijalbo, 1983.

Polya G., *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1979.

Singh, S., *El último teorema de Fermat.* Bogotá, Norma, 1999.

Swokowsky-Cole, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, Thomson,

Vilenkin, *De cuántas formas (Combinatoria).* Mir

Zill, Dewar, *Álgebra y trigonometría.* Mc Graw Hill

Provincia de Buenos Aires

Gobernador
Ing. Felipe Solá

Director General de Cultura y Educación
Prof. Mario Oporto

Subsecretario de Educación
Prof. Alberto Sileoni

Director Provincial de Educación
de Gestión Estatal
Prof. Jorge Ameal

Director Provincial de Educación
de Gestión Privada
Prof. Juan Odriozola

Directora de Currículum
y Capacitación Educativa
Lic. María Cristina Ruiz

Director de Educación Polimodal
y Trayectos Técnico-Profesionales
Prof. Daniel Lauría

Dirección General de
Cultura y Educación
Gobierno de la Provincia
de Buenos Aires

Subsecretaría de Educación

Dirección de Educación Polimodal
y Trayectos Técnico-Profesionales
Torre Gubernamental I - piso 12
Calle 12 y 50 (1900) La Plata
Provincia de Buenos Aires
Tel. (0221) 4295279 / Fax (0221) 429 5271
E-mail: sdemtya@ed.gba.gov.ar